Atando cabos, contando circunferencias

Aitzol Lasa[1] *y Miguel R. Wilhelmi*[2]

[1]aitzol.lasa@unavarra.es, Universidad Pública de Navarra
[2]miguelr.wilhelmi@unavarra.es, Universidad Pública de Navarra

Resumen

Se presenta el análisis de los comportamientos en una cuestión de combinatoria en la Olimpiada Matemática de 2º ESO. El Enfoque ontosemiótico y la Teoría de situaciones didácticas en matemáticas constituyen el marco teórico para la discusión de los resultados. Los datos se han tratado estadísticamente a partir del análisis implicativo. Los resultados indican que los participantes disponen de estrategias aritméticas suficientes sin necesidad de recurrir al algebra combinatoria. No obstante, el nivel de algebrización mostrado por los participantes en otras preguntas de la Olimpiada muestra una correlación fuerte con los comportamientos observados. Es pues la capacidad de adaptación un elemento clave para el análisis de las estrategias observadas y su tasa de éxito.

Palabras clave: combinatoria, nivel de algebraización, adaptación a un contexto matemático, análisis implicativo.

1. Introducción

La organización de la Olimpiada Matemática de 2º ESO resulta problemática desde el punto de vista de los contenidos matemáticos susceptibles de aparecer en la prueba. La geometría, junto con la aritmética y la medida, son tópicos que se incluyen de forma natural, dado que el currículo contempla estos tópicos en bloques de contenidos específicos. No ocurre lo mismo con la lógica (problemas *de pensar*) y el azar (combinatoria y probabilidad). Además, la resolución de este tipo de problemas tiene un alto grado de dificultad, incluso para estudiantes de niveles superiores.

Este trabajo muestra las respuestas de los participantes de la Olimpiada a una tarea de combinatoria. El repertorio de estrategias movilizado se basa en el conteo y la representación analógica; asimismo, los participantes utilizan representaciones algebraicas en distintos *niveles de algebrización* (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014). El tratamiento de los datos y la obtención de los resultados se basan en una estadística descriptiva y en el análisis implicativo. La discusión de los resultados se apoya en el Enfoque onstosemiótico (EOS) y en la Teoría de situaciones didácticas en matemáticas (TSDM). Los procedimientos de recuento observados y la tasa de éxito en la ejecución de la tarea justifican la introducción de problemas de combinatoria en el primer ciclo de Educación Secundaria. Por último, se deducen implicaciones para la progresión en la adquisición de los niveles de algebrización por los estudiantes.

2. Marco Teórico

El Enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y de la instrucción matemáticos sitúa las prácticas operativas y discursivas en el centro de la actividad matemática y de su análisis (Font, Godino y D'Amore, 2007; Contreras, Ordoñez y Wilhelmi, 2010). En las primeras etapas, en

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 145-152). Granada, 2015.

tareas de recuento, la materialización resulta esencial, ya que los estudiantes cuentan los objetos particulares o sus representaciones ostensivas. Asignan de esta forma significado personal a la combinatoria a partir de tareas de recuento sistemático, donde la eficacia supone la aplicación correcta de principios básicos del conteo (ningún elemento sin contar, ningún elemento se cuenta por más de una vez).

Más adelante, cuando las tareas implican un alto número de casos, la representación ostensiva es inadecuada o resulta demasiado costosa. Se produce una ruptura de contrato, ya que los objetos dejan de ser accesibles al conteo, siendo necesarios procedimientos básicos no-ostensivos de conteo, donde la generalización y la utilización de intensivos son necesarios. Estas necesidades no son evidentes, ni están exentas de conflictos. “Cada método [de resolución] se vuelve rápidamente complejo e incierto cuando aumenta el tamaño de la colección, mientras que el método siguiente no presenta todavía una eficacia evidente” (Brousseau, 2007, 42). Así, el paso de una estrategia a otra no se realiza de manera lineal (figura 1).

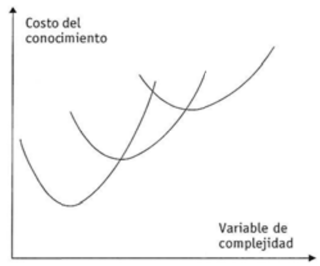


Figura 1. Progresión regular de la enseñanza sin saltos informacionales (Brousseau, 2007, 43)

En el caso de la combinatoria, la progresión regular se concreta en el paso de la utilización de *técnicas explícitas* (contar todos los casos) a *técnicas implícitas* (uso de reglas, cálculos y argumentos). Así, la práctica matemática desemboca en fórmulas y algoritmos. Es entonces cuando la institucionalización de las nociones de *permutación*, *variación* y *combinación*, como instrumentos eficaces de recuento de clases de problemas, es pertinente (Wilhelmi, 2004).

En la figura 2 se representa de manera sintética este proceso, que involucra las dualidades:

- *Ostensivo / no-ostensivo*. De los recuentos de objetos físicos o de sus representaciones, (por una *materialización* exhaustiva de todos los casos) se pasa al recuento de situaciones sin el conteo constructivo de todos los casos (por un proceso de *idealización* mediante esquemas, metáforas o agrupaciones).
- *Extensivo / intensivo*. De los recuentos particulares, normalmente poco numerosos, se pasa a la identificación de reglas de formación de familias de casos, que involucran procesos de particularización (concreción de la regla en un caso particular) y de *generalización* (identificación del patrón común de varios recuentos concretos).
- *Personal / Institucional*. Los significados personales sirven de base para la motivación de los significados institucionales, que en muchos casos involucran la determinación de fórmulas que modelizan clases de situaciones.

El proceso de generalización está íntimamente ligado a la utilización de intensivos propio de las prácticas con un componente algebraico esencial. El EOS distingue distintos *niveles de algebrización* (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014), desde un *nivel 0* (procedimientos exclusivamente aritméticos en ausencia del álgebra) hasta un *nivel 3* (consolidación del álgebra), pasando por el *nivel 1* (incipiente, se emplean intensivos en tareas estructurales) y *nivel 2* (intermedio, aparecen variables pero no se opera con ellas). Así, la identificación del nivel de algebrización mostrado por los estudiantes es una variable que tendrá que ser tenida en cuenta en el análisis de las realizaciones de los participantes.

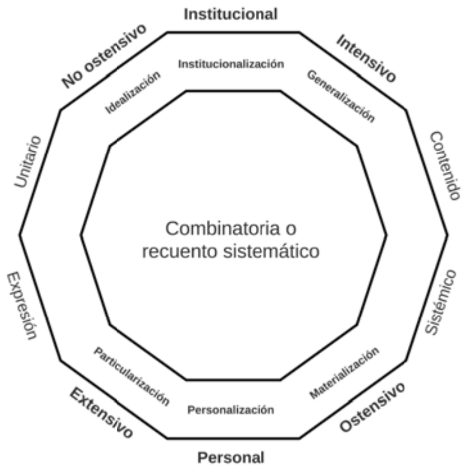


Figura 2. Combinatoria o recuento sistemático como práctica operativa y discursiva

3. Análisis a priori

La introducción de un problema de combinatoria o probabilidad en la Olimpiada Matemática está justificada por los objetivos generales de la etapa. En efecto, en primer y segundo curso de ESO se debe promover, entre otros, la *formulación de conjeturas*, la *recogida y organización de la información en tablas y diagramas* y el *recuento de frecuencias absolutas y relativas*, en relación a *fenómenos aleatorios sencillos* (MEC, 2007). Asimismo, se fomenta la resolución de problemas de la vida cotidiana "de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas" (p. 752), manifestando una actitud positiva que permita al estudiante "disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas" (p. 752).

Así, aunque en el currículo oficial de 2º ESO no se propone un apartado específico de contenidos de combinatoria, no se establece la limitación para promover problemas cuya resolución precise de un recuento de casos. De hecho, la *combinatoria* como el conjunto de estrategias para el recuento implícito de casos sin contar por exceso ni por defecto (Wilhelmi, 2004), es un contexto adecuado para la exploración sistemática de alternativas, la formulación de conjeturas, la puesta en marcha de métodos de resolución diversos y el análisis de su eficacia.

Las tareas combinatorias son complejas en todas las etapas educativas. Prueba de ello es que estudiantes universitarios con alta preparación matemática encuentran las dificultades equiparables que estudiantes de bachillerato sin instrucción específica en la materia, en la resolución de algunos problemas para los que no se precisan, a primera vista, conocimientos matemáticos sofisticados (Roa, Batanero y Godino, 2001). Es más, los libros de texto no presentan tareas que promuevan realmente la adquisición de contenidos combinatorios, quedando el estudio del tema de combinatoria aislado (Espinoza y Roa, 2013). Así, la enseñanza se centra en la mostración de una clase de situaciones estereotipadas que precisan dos únicos pasos: a) determinación del tipo de problemas (permutación, variación o combinación, con o sin repetición); b) cálculo mediante una fórmula.

En efecto, una institucionalización precoz del álgebra de la combinatoria, es decir, el uso de intensivos (algoritmos para el recuento de casos ideales) en ausencia de un significado personal asignado al proceso de recuento, parecen ser los responsables de este fracaso. Se deben potenciar, por tanto, las estrategias de resolución de problemas, la enumeración sistemática y el uso de diagramas de árbol, sin el corsé de las fórmulas combinatorias, y libre de ataduras formalistas.

Por todo ello, en el análisis de las respuestas de los participantes de la Olimpiada Matemática, cabe formular las siguientes preguntas según la competencia mostrada:

- Si un participante realiza el recuento de todos los casos, ¿qué reglas básicas de la numeración, la suma y el producto se observan en la resolución?
- Si un participante no realiza el recuento de todos los casos, ¿en qué tipo de intensivos se apoya para afrontar la tarea?

Además, se indaga sobre la posible relación entre las variables “resolución del problema de combinatoria” y “nivel de algebrización mostrado en la prueba”, estableciéndose la siguiente conjetura: *Existe una correlación alta entre el nivel de algebrización mostrado por los participantes y la eficacia en las tareas de recuento de casos*.

4. El problema

Los participantes disponen de cuatro cordones indistinguibles con los que experimentar, que pueden ser anudados de múltiples formas, antes de pasar al análisis simbólico de la situación. Se potencia así la dimensión ostensiva a partir de material manipulativo (Arimatéa y Souza, 2013):

“Abel y Belén inventan un juego. Disponen de cuatro cordones, y Abel los toma en su puño (figura 3). Los extremos de los cordones son visibles, tanto en la parte superior como en la parte inferior. Sin embargo, no hay forma de saber qué extremo inferior corresponde a cada extremo superior. A continuación, Belén ata los extremos, los anuda de dos en dos: dos nudos en la parte de arriba, otros dos en la parte de abajo. Por último, Abel suelta los cordones:

- Si los cordones aparecen en ataduras separadas, Abel gana el juego.
- Si los cordones aparecen en una única atadura, Belén gana el juego.

¿Cuál de los dos tiene más probabilidades de ganar? ¿Abel o Belén?”

Figura 3. Disposición de los cordones

La forma en la que se atan los cordones A, B, C y D en la parte superior no influye en la resolución. Se considera pues una atadura particular, AB (que implica necesariamente la atadura

CD). Abel solo gana en caso de que ate los cabos de los mismos cordones en la parte inferior, A’B’(C’D’), mientras que Belén dispone de dos casos a favor: A’C’(B’D’) y A’D’(B’C’). Por lo tanto, Abel gana con una probabilidad de 1/3, mientras que Belén dispone de probabilidad doble, 2/3. El estudio de todas las ataduras posibles superiores “AB(CD), AC(BD) y AD(BC)”, no afecta a la probabilidad final: la probabilidad de ganar de Abel es ahora 3/9 y la de Belén 6/9.

5. Resultados

Solo una décima parte de los participantes malinterpreta el enunciado, dando a entender que el propósito del problema se ajusta al grado de dificultad de la etapa. La tabla 1 resume los comportamientos y los tipos de resolución observados.

Tabla 1. Tipos de resolución observados

RES1	Interpreta correctamente el enunciado	90%
RES2	Explica el razonamiento en un discurso escrito	54%
RES3	Utiliza una tabla para el recuento de casos	18%
RES4	Utiliza representaciones analógicas de las cuerdas	41%
RES5	Juega las partidas (estudio empírico)	5%
RES6	Contesta por intuición global sobre el enunciado	50%
RES7	Explicita el conteo de todos los casos	51%
RES8	Realiza algún tipo de conteo implícito (argumentos, cálculos para obtener los casos favorables)	20%

El tipo de resolución más extendido contiene representaciones analógicas en dos dimensiones de los cordones, una descripción del proceso de conteo y una explicación escrita del razonamiento. Los participantes explicitan todos los casos y dan una respuesta al problema en función del número de casos de uno u otro tipo que han encontrado (figura 4).

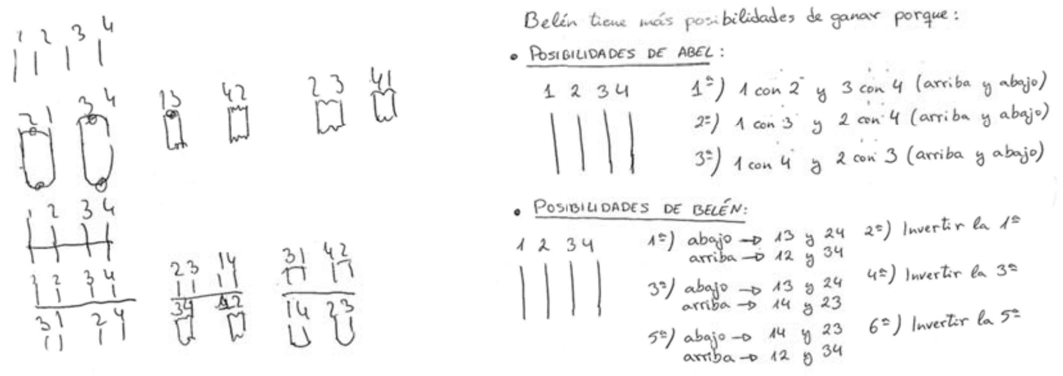
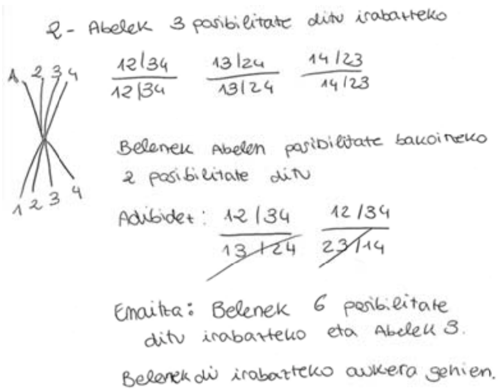


Figura 4. Representaciones analógicas y conteo de todos los casos

En menor grado, se realiza algún tipo de conteo implícito a partir de argumentos razonados para justificar la existencia de más casos favorables a Abel o a Belén. Este tipo de resolución permite encontrar al jugador con más probabilidad de ganar, pero en algunos casos no permite determinar la probabilidad asociada (figura 5).



"Abel tiene 3 posibilidades de ganar.

Por cada posibilidad de Abel, Belén tiene dos posibilidades de ganar.

–Ejemplo–

Solución: Belén tiene 6 posibilidades de ganar y Abel tiene 3. Belén tiene más posibilidades de ganar."

Figura 5. Tabla de casos y regla de casos favorables.

Otro tipo de resoluciones, aunque no muy extendidas, se basan en la realización de un conjunto amplio de partidas para asociar una probabilidad frecuencial "en acto" (Vergnaud, 1981) (figura 6).

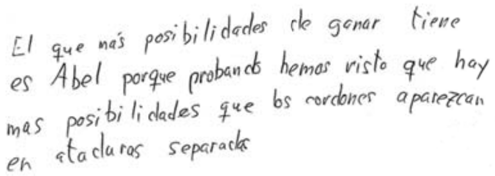


Figura 6. Resolución empírica.

El problema no se presta a ser resuelto a partir de cálculos algebraicos consolidados. Prueba de ello es que el 44% de los participantes muestran un *nivel 3 de algebrización* a lo largo de la Olimpiada, mientras que en este problema en particular el 26% muestra un *nivel 1*; y el 22% un *nivel 2* (tabla 2).

Tabla 2. Niveles de algebrización

Problema	ALG1	Uso de flechas, códigos y símbolos (nivel 1)	26%
	ALG2	Uso de variables e indeterminadas (nivel 2)	22%
Olimpiada	ALG3	Muestra nivel 3 a lo largo de la Olimpiada	44%

En cuanto al campo numérico empleado, los participantes parecen tener una ligera preferencia sobre los números naturales (NUM1, 37%) antes que los números racionales (NUM2, 30%), pero no hay pruebas de que estas diferencias sean significativas.

El 43% de los participantes establece que es más probable el suceso "Belén gana", que el suceso "Abel gana" (COR1). De estos participantes, únicamente el 13% determina la probabilidad asociada a estos sucesos (COR2).

El análisis implicativo de los resultados genera un diagrama en el cual se pueden observar relaciones entre las variables. En particular, cabe destacar que las variables COR1 y COR2 guardan una fuerte relación con el *nivel 3 de algebrización* (ALG3) y la utilización del campo numérico racional (NUM2).

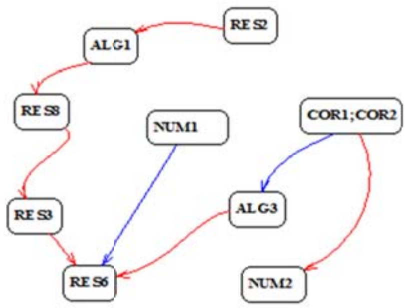


Figura 6. Análisis implicativo

Existe una cadena de comportamientos que guardan una fuerte relación: los participantes que priman la argumentación escrita del problema (RES2) muestran un *nivel 1 de algebrización* (ALG1). A su vez, el *nivel 1* guarda relación con las estrategias de conteo implícito (RES8), el conteo implícito con la utilización de tablas (RES3), y esta última con la interpretación global del problema (RES6). Sin embargo, estas relaciones no son transitivas, hecho que refuerza que las relaciones ni son causales ni determinan *per se* un criterio para anteponer la enseñanza de un tópico con relación a otro. Por último, el empleo del campo numérico natural (NUM1) guarda relación directa con la interpretación global del problema (RES6).

6. Discusión de los resultados y orientaciones para la enseñanza

Los participantes que tienen éxito en la resolución de la tarea muestran un dominio claro del campo numérico racional y del álgebra (demuestran un *nivel 3 de algebrización* en el resto de problemas de la Olimpiada). Sin embargo, en el problema combinatorio tratado, emplean estrategias aritméticas y de conteo de todos los casos, junto con representaciones analógicas y en ausencia de codificaciones complejas. Es decir, los participantes que dominan el álgebra son asimismo conscientes de las limitaciones de su uso. El *costo* de la vieja técnica (aritmética) es inferior al de la nueva (algebraica), en relación a la *complejidad* de la tarea (figura 1).

Por otro lado, los participantes que utilizan un lenguaje ordinario y demuestran un nivel inferior de uso del algebra (*nivel 1 de algebraización* en este problema de combinatoria) emplean, de forma errónea, estrategias implícitas de conteo que no han posibilitado la obtención de una respuesta correcta. Este conjunto de participantes trata de resolver el problema con una técnica no consolidada. A pesar de no tener un dominio claro del álgebra, intentan calcular el número de casos favorables a partir de intensivos (operaciones, reglas y argumentos).

Tampoco dan buenos resultados ni el uso de tablas, ni una interpretación global e intuitiva del problema (estos participantes no dividen el problema principal en problemas más pequeños). En contraposición al campo numérico racional, que aparece ligado a las variables que miden la tasa de éxito, el campo numérico natural guarda relación con esta comprensión intuitiva y simplista del problema.

De esta forma, el estudio sugiere que en la enseñanza del álgebra se debe atender a: a) el análisis de su campo de uso, b) la valoración de la eficacia y coste de sus técnicas asociadas, c) la adquisición de estrategias de control, en muchos casos basadas en métodos aritméticos, y, por último, d) la articulación de los distintos campos numéricos.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2012-31869, MINECO.

Referencias

Arimatéa, C. de, Souza, E. de. (2013). Reflexões de docentes sobre o ensino de combinatória: transitando entre conhecimento pedagógico e do conteúdo. En J. M. Contreras, G. Cañadas, M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las 1as Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 555-562). Granada: Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Arires: Zorzal.

Contreras, A., Ordoñez, L., Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, 28(3), 367–384.

Espinoza, J. y Roa, R. (2013). Desarrollo del tema de combinatoria presente en algunos libros de texto de matemática de educación secundaria en España. En J.M. Contreras, G. Cañadas, M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las 1as Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 181-188). Granada: Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Font, V., Godino, J.D., D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *For the learning of mathematics*, 27(2), 2–7.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). Real Decreto 1631/2006 por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO. *BOE* 5, de 5 enero, 677-773.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J.D. (2001). Dificultad de los problemas combinatorios en estudiantes con preparación matemática avanzada. *Números*, 47, 33–47.

Vergnaud, G. (1981) Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en Didactique des mathématiques. *RDM* 2 (2), 215-232.

Wilhelmi, M. R. (2004). *Combinatoria y probabilidad*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.