

# Caracterización de los campos de problemas asociados a la noción de media en 3º de eso. Un estudio a través de libros de texto

Ignacio González-Ruiz<sup>1</sup> y María Teresa González Astudillo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ignaciogr@usal.es, Universidad de Salamanca

<sup>2</sup>maite@usal.es, Universidad de Salamanca

## Resumen

En este trabajo identificamos, diferenciamos y caracterizamos los campos de problemas asociados al concepto de media, a partir de una muestra de cuatro libros de texto de 3º de ESO. Destacamos la distribución irregular de los doce campos de problemas que determinamos en los textos, advirtiendo de sus consecuencias didácticas, y presentamos un análisis de los resultados útil a la hora de relacionar entre sí campos de problemas, libros de texto y las actividades relativas al concepto de media que en estos se proponen.

**Palabras clave:** Campos de problemas, educación secundaria, libros de texto, media.

## 1. Introducción

Las medidas de tendencia central son fundamentales para comprender muchos conceptos estadísticos. Batanero (2000) destaca, entre otros, el de variable estadística y sus distribuciones, ya que las últimas pueden caracterizarse por medio de las medidas de posición central. Centrándonos en la media, podemos encontrarla al introducir las familias de distribuciones de probabilidad, como uno de los parámetros en las distribuciones de Poisson, exponencial o normal. Por ello, la comprensión de la media y sus propiedades resulta un requisito para seleccionar una distribución específica dentro de una de estas familias de distribuciones.

En otros ámbitos de la estadística, como en el muestreo, se recurre a la idea de media, debido, fundamentalmente, a sus propiedades como estimador insesgado, eficiente, consistente y suficiente de la media poblacional. Contribuyendo a la justificación de la importancia de la media, Alvarado (2007) apunta a que los teoremas límite confieren una gran relevancia a la estimación de ésta en muchas situaciones propias de la inferencia, debido a que la distribución normal queda determinada por la media y desviación típica. Por otro lado, Batanero y Díaz (2008) destacan que tanto el análisis de la varianza como el diseño de experimentos se fundamentan en la comparación de la media global de una muestra con las medias parciales de grupos definidos en ellas. Asimismo, sobre la idea de media se organizan nociones que conviven en el día a día de las sociedades modernas. Nociones como “esperanza de vida” o expresiones como “renta media por habitante” dan cuenta de que la comprensión de la media resulta imprescindible.

La Educación Secundaria Obligatoria no es ajena a la importancia que supone la familiarización con las medidas de tendencia central, siendo un periodo educativo de aproximación a su estudio. Así se establece en el correspondiente Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006), donde destacan los cursos de segundo y tercero por ser en los que culmina, desde una óptica descriptiva, el estudio de estos conceptos. Así, para el estudio específico de la media se precisa lo siguiente (ver Tabla 1)

Tabla 1. El estudio de la media en 2º y 3º de la ESO.

Segundo curso	Significado, estimación y cálculo. Utilización de sus propiedades para resolver problemas. Utilización de la media para realizar comparaciones y valoraciones.
Tercer curso	Cálculo y aplicaciones. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. Utilización de la media para realizar comparaciones y valoraciones.

Por ello, contextualizaremos nuestro trabajo en el último de estos niveles analizando los campos de problemas que aparecen en los libros de texto en los que interviene el concepto de media.

## 2. Fundamento teóricos

Dedicamos este apartado a los referentes teóricos sobre los que se fundamenta este trabajo, los libros de texto y los campos de problemas. En relación a los primeros, destacamos su importancia como recurso didáctico, señalando algunos de los aspectos más significativos que, en este sentido, defienden algunos autores. En relación a los segundos, destacamos la noción de situaciones problemas, siguiendo las ideas del enfoque onto-semiótico sobre el significado de los conceptos matemáticos, a partir de las cuales emergen los campos de problemas.

### 2.1. Importancia de los libros de texto

La implantación de la ESO trajo consigo la publicación de un buen número de libros de texto. Su análisis resulta de interés para clarificar el significado que confieren a los conceptos estadísticos, verificando que se adecúan a los propósitos para los que fueron diseñados. Nuestra investigación viene avalada por la importancia que el libro de texto tiene como recurso didáctico, tal y como se recoge en el informe Cockroft (1985).

Algunos autores, como Chevallard (1991) destacan que los libros de texto presentan una concepción legitimada del saber a enseñar e institucionalizan una forma de progresión del conocimiento de los estudiantes. Cordero y Flores (2007) indican que el discurso matemático escolar está determinado, con frecuencia, por el libro de texto, que regula las acciones de enseñanza y aprendizaje, junto con las creencias de los profesores. Más aún, Robert y Robinet (1989) subrayan que su estudio nos confiere información acerca de las concepciones del profesorado sobre un contenido específico, puesto que la selección de un texto u otro le aproxima al tratamiento que de éste se hace en el texto.

Por otro lado, Reys, Reys y Chavez (2004) destacan la capacidad de los libros de texto para presentar las ideas matemáticas en diferentes contextos, a la vez que permiten a los estudiantes explorar diferentes ideas y facilitar el aprendizaje

### 2.2. Significado de un concepto matemático: el caso de la media aritmética. Campos de problemas

Las posibles dificultades que los alumnos encuentren en el estudio de la media tendrán relación con la enseñanza recibida. Reflexionar acerca de la dificultad que el aprendizaje de este concepto tiene en los alumnos, requiere de un análisis epistemológico de su significado (Godino (1996)). Centrándonos en la media y siguiendo a Godino y Batanero (1994, 1997) y Batanero y Godino (2001), consideramos las siguientes entidades primarias como constituyentes de su significado: problemas y situaciones; procedimientos, algoritmos, operaciones; representaciones; abstracciones (conceptos y proposiciones); y demostraciones. En este trabajo nos aproximamos a la primera de ellas. Así, entendemos por situaciones problemas las

aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios o problemas que inducen actividades matemáticas y definen el campo de problemas de donde surge la idea de media. Cobo (2003) propone como ejemplo de una situación problema, asociado al concepto de media, encontrar la mejor estimación de una cantidad desconocida.

Este planteamiento teórico defiende que los objetos matemáticos son fruto de la construcción humana, cambian a lo largo del tiempo y pueden dotarse de significados diversos por personas o instituciones diferentes. En consecuencia, se considera a los objetos matemáticos como entidades culturales socialmente compartidas. Los problemas matemáticos y sus soluciones son compartidos en el seno de instituciones o colectivos específicos implicados en el estudio de ciertas clases problemas. En algunos casos estas instituciones pueden ser extra matemáticas, aunque posteriormente la comunidad matemática se interesa por su solución y la aplica a otros problemas o contextos. De esta manera se configuran los llamados campos de problemas, a cuyo estudio nos dedicamos en este trabajo.

### 3. Metodología

Hemos seleccionado cuatro libros de texto de uso vigente en España (ver Tabla 2), correspondientes al tercer curso de la ESO, que cuentan entre sus temas con uno dedicado a las medidas de tendencia central en el que se aborda el estudio de la media. Entre todos ellos se han recogido un total de 55 actividades relacionadas con el concepto de media. Además presentan una característica común: proponen el mismo tipo de definición para la media, basada en la frecuencia ( $f_i$ ) asociada a cada valor numérico ( $x_i$ ) perteneciente a un conjunto dado de cardinal  $N$ :

$$x \cong \frac{\sum_{i=1}^N x_i f_i}{N} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_N f_N}{N}$$

Tabla 2. Descripción de los libros de texto analizados.

Identificador	Caracterización del libro de texto/ Localización de la media en el texto	Nº de actividades sobre la media
L1	<i>Matemáticas 3 ESO</i> . Proyecto “La casa del saber”. Ed. Santillana. 2007. /Tema13. Estadística; 13.4. Medidas de centralización.	12
L2	<i>Matemáticas 3</i> . Editorial Edelvives. 2007. /Tema 12. Estadística descriptiva; 12.5. Parámetros de centralización.	5
L3	<i>Matemáticas (Múltiplo) 3º ESO</i> . Proyecto “Conectados 2.0”. Ed. SM. 2010. /Tema 15. Parámetros estadísticos; 15.1. Media aritmética y moda.	30
L4	<i>Matemáticas (Pitágoras) 3º ESO</i> . Proyecto “Conectados 2.0”. Ed. SM. 2010. /Tema 13: Estadística; 13.5. Medidas de posición central: media, mediana y moda	8

Para llevar a cabo la caracterización de los campos de problemas, hemos examinado, de acuerdo con los referentes teóricos considerados, el conjunto de las 55 actividades que disponemos con el fin de identificar las distintas situaciones problema que en ellas se plantean; ya que de éstas emergen los campos de problemas. Nos hemos centrado en actividades cuya solución requiere de matematización (Freudenthal, 1991); esto es, en ellos se contemplan, al menos, alguno de los siguientes aspectos:

- Encontrar la solución de un problema que no es inmediatamente accesible.

- Adoptar una simbolización adecuada para representar la situación problemática y/o la solución encontrada, y para comunicar estas soluciones a otras personas.
- Justificar la solución obtenida.
- Generalizar la solución a otros contextos, situaciones problema y procedimientos.

Los resultados se han organizado considerando la distribución de campos de problemas asociada a cada libro de texto y la cuantificación explícita de las actividades asociadas a esa distribución. Todo ello, dará muestra del énfasis que cada uno de los textos confiere a los distintos campos de problemas.

#### 4. Resultados

El análisis de los libros de texto nos ha permitido determinar los siguientes tipos diferenciados de problemas, que en su conjunto definen el campo de problemas asociado a la media y nos permiten acotar el significado institucional local de nuestro trabajo. A continuación describimos estos campos de problemas.

*CP1. Obtener el promedio, como valor representativo, de los valores que toma una variable estadística o un conjunto de datos dado.* Bajo esta denominación se agrupan las actividades centradas en el cálculo de la media aritmética. Distinguimos los siguientes subcampos:

- *CP1.1. Obtener el promedio de los valores que toma una variable estadística discreta.* Si los datos provienen de una variables estadística discreta con su distribución asociada
- *CP1.2. Obtener el promedio de los valores que toma una variable estadística presentados de forma agrupada.* En caso de que el rango de valores que toma la variable se presenta en forma de intervalos.

*CP2. Obtener uno o más valores desconocidos de un conjunto dado, conocida la media y/o otras medidas de tendencia central.* Se trata de usar la media u otros estadísticos de tendencia central, para plantear una ecuación (o ecuaciones) de primer grado, conducentes a la obtención del valor (o valores desconocidos). Se distinguen dos subcampos.

- *CP2.1. Obtener uno o dos valores desconocidos de un conjunto dado, conocidas la media, la moda y la mediana.* Si requiere del planteamiento de más de una ecuación, habida cuenta que se considera un mayor número de variables (media, moda y mediana) para obtener los valores desconocidos.
- *CP2.2. Obtener un valor desconocido de un conjunto dato, conocida la media muestral.* Si se plantea una única ecuación de primer grado, donde la incógnita es el valor del conjunto dado que desconocemos.

*CP3. Obtener la media de un conjunto de valores contruidos a partir de otro conjunto.* Las actividades que aquí se incluyen requieren de la construcción de un nuevo conjunto de valores con respecto a los de partida, para calcular la media de este nuevo conjunto. Encontramos dos subcampos de problemas:

- *CP3.1. Obtener la media de un conjunto de valores contruidos a partir de los valores de un conjunto de partida, de forma que las medias de los dos conjuntos coincidan.* En este caso, hay que modificar los valores de partida, para que el valor media coincida con el valor de los media de partida.
- *CP3.2. Obtener la media de un conjuto de valores contruidos a partir de la modificación de los valores de un conjunto de partida.* Si basta con modificar por medio de algún tipo de operación aritmética, uno a uno, los valores del conjunto de partida

*CP4. Obtener un valor representativo de dos o más realizaciones muestrales que favorezca su comparación.* Se trata de evidenciar el papel de la media como representante, de utilidad para comparar los diversos valores que puedan tomar distintas realizaciones una muestra.

*CP5. Obtener la media aritmética de un conjunto de datos conocidas las medias de una partición del mismo.* Considerando una partición de un conjunto de valores y las medias asignadas a ella, se trata de calcular el valor de la media para el total de datos del conjunto.

*CP6. Obtener la suma de los elementos de un conjunto de números o el cardinal de dicho conjunto, conocidas algunas relaciones establecidas entre los elementos del conjunto y el valor de su media aritmética.* Las actividades que se incluyen en este campo, cuentan con un buen número de hipótesis acerca de las relaciones establecidas entre los elementos del conjunto y el valor de su media.

*CP7. Estimar el valor de la media de una variable estadística a partir de su representación gráfica.* Se trata de aportar un valor razonable, como media de variable estadística, a partir de la lectura e interpretación de gráfica de sus valores. Dichas representaciones son histogramas, gráficos poligonales o pirámides de población.

*CP8. Estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas, en presencia de errores.* Cobo (2003) estudia este campo de problemas, caracterizado porque las actividades destacan las propiedades de la media como estimador, tales como ser insesgado o tener mínima varianza.

*CP9. Valorar la significatividad de la media como representante de un conjunto de datos e indagar en su comportamiento, atendiendo a sus propiedades.* Las actividades propias de este campo se centran en el estudio de la media a partir de algunas de sus propiedades básicas.

Tabla 3. Distribución de problemas por campos y libros de texto.

Campos de problemas	Libros de texto				Total de problemas
	L1	L2	L3	L4	
CP1.1	6	1	14	3	24
CP1.2	1	1	3	2	7
CP2.1	2				2
CP2.2		1	4		5
CP3.1	1				1
CP3.2	1	1			2
CP4			1		1
CP5			3	1	4
CP6			3		3
CP7	1		2	1	4
CP8				1	1
CP9		1			1
Total de problemas	12	5	30	8	55

Para establecer la correspondencia entre los campos de problemas y los libros de texto considerados recurrimos a la construcción de la Tabla 3. Se observa que en todos los libros se localiza el campo de problema CP1, centrado en la obtención del valor de la media; en particular, L1 y L3 cuentan problemas propios de los tres subcampos distinguidos. Por otro lado, se observa que estos dos textos son los que diferencian un mayor número de campos de problemas, siete y ocho, respectivamente. Destaca también el CP7, relativo a la estimación de la

media de una variable a partir de la representación gráfica, como uno de los que cuenta con una mayor presencia en los textos, en concreto en tres de ellos. El resto de campos y subcampos de problemas aparecen de forma más restrictiva; siendo, en algunos casos, exclusivos de un único texto (CP2.1, CP3.1, CP4, C6, CP8 y CP9).

Atendiendo al desglose del número de actividades que cada libro de texto vincula a los campos de problemas se puede hacer una lectura de la tabla anterior poniendo el centro de atención en los libros o en los campos de problemas.

En cuanto a los libros, L3 es el texto que incluye un mayor número de actividades, un total de treinta, concentrándose la mayor parte de ellas, en el subcampo de problemas CP1.1 (obtención de la media de una variable estadística discreta). A este mismo subcampo corresponden también la mayor parte de las actividades propuestas en L1 y L4 (seis y tres respectivamente). Resulta significativo que en L2 se distribuyen uniformemente el número de actividades entre sus campos de problemas (uno para cada campo).

Respecto a la segunda, hemos de notar que de las cincuenta y cinco actividades, un total de veinte se agrupan en el subcampo de problemas CP1.1, anteriormente aludido. El subcampo CP1.2, centrado en obtener la media una variable estadística cuyos datos se presentan agrupados, cuenta también con una presencia destacable; siete actividades del total. Puede vislumbrarse, además, que CP6 (obtener la suma de los elementos o su cardinal, conocidas las relaciones con su media), pese a presentarse únicamente en L3, responde a tres de las cincuenta y cinco actividades. Algo similar ocurre para los campos CP2.2 y CP5, que suponen cinco y cuatro del total, respectivamente.

## 5. Conclusiones

A la luz de los resultados obtenidos, nuestro trabajo pone de manifiesto que en los cuatro libros de texto de 3º de ESO seleccionados, se diferencian un buen número de campos de problemas; un total de nueve. Si bien, nuestro análisis da muestra de una cierta irregularidad en la distribución de los campos de problemas en los textos, siendo L1 en el que se muestra un mayor número de campos, siete del total. De esta forma, se advierte a los usuarios de los textos, especialmente a los profesores, un uso responsable de los mismos, según cuáles sean las pretensiones formativas a las que se ambicione satisfacer con su uso.

Del total de campos de problemas que hemos diferenciado destaca CP1, centrado en obtener la media de los valores que toma una variable estadística o un conjunto de datos dado, tanto por su presencia en la totalidad de los textos, como por la cantidad de actividades asociadas al mismo. En este sentido, los subcampos CP1.1 (variable estadística discreta) y CP1.2 (datos agrupados) son los más notables.

Entendemos que la presentación de los resultados que incluye nuestro trabajo resulta significativa a la hora de identificar los campos de problemas y su vinculación a los libros de texto y las actividades que en ellos se recogen.

## Referencias

- Alvarado, H. (2007). *Significados institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 25, 41-58.

- Batanero, C. y Godino, J. D. (2001). Developing new tools in statistics education research. *Proceedings of the 53<sup>rd</sup> Session of the International Statistical Institute, Bulletin of ISI* tome LIX (book 2, pp. 137-142). Seoul: International Statistical Institute.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2008). *Análisis de datos con Statgraphics*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Chevallard (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La pensée sauvage.
- Cobo, B. y Batanero, C. (2003). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 5–18.
- Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 10(1), 7-38.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, 417-424). Universidad de Valencia.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1997). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.
- M.E.C. (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Reys, B. J., Reys, R. E. y Chavez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership*, 61(5), 61–66.
- Robert, A. y Robinet, J. (1989). *Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels (IREM)*. París: Universidad de París.