Conhecimentos de futuros professores de matemática sobre probabilidade condicional por meio do jogo das três fichas

José Ivanildo Felisberto de Carvalho

ivanfcar@hotmail.com - Universidade Federal de Pernambuco – UFPE/Brasil

Resumo

Esta comunicação discute conhecimentos necessários para a compreensão do conceito de probabilidade condicional na formação inicial do professor de matemática. Apresentamos a análise de um jogo vivenciado com 25 futuros professores do curso de Matemática-licenciatura da UFPE – campus acadêmico do Agreste. Os resultados apontam lacunas no conhecimento comum e especializado do conteúdo deste grupo com o conceito de probabilidade condicional. A atividade está ancorada na literatura sobre os processos de ensino e aprendizagem da probabilidade constituindo-se também como exemplo de abordagem na formação do professor para melhor desempenho em seu futuro exercício docente.

Palavras chave: Probabilidade Condicional; Educação Probabilística; Formação de professores; Conhecimentos de professores de matemática.

1. Introdução

O conceito de probabilidade condicional é um conceito relevante no campo das estatísticas por considerar alterações no nosso grau de crença sobre eventos aleatórios ao adquirimos novas informações. Ter conhecimentos concernentes a este conceito é base para uma sábia tomada de decisão em situações que envolvem a incerteza, seja na vida cotidiana, seja no campo profissional.

A natureza da probabilidade condicional precisa de uma atenção especial dos professores de matemática por que o mapeamento do espaço amostral se revela mais complexo. A utilização apenas procedimental da fórmula não propicia uma compreensão deste conceito. Este conceito é utilizado tanto na estatística clássica como na bayesiana reforçando a necessidade de uma abordagem diferenciada e significativa do mesmo.

A probabilidade condicional refere-se à probabilidade de ocorrer um evento (A) sabendo-se que outro evento (B) já ocorreu. Formalmente, se define mediante a expressão:

$$P\ (A \mid B\ ) = P\ (A \cap B) \ / \ P(B) \text{ sempre que } P(B) > 0.$$

Em pesquisas realizadas por diversos autores, envolvendo tanto professores como estudantes, uma das dificuldades com probabilidade condicional é discriminar adequadamente a direção da condicional P (A|*B*) e P (B|*A*) ou supor que P (A|*B*) e P (B|*A*) são iguais (Batanero, Contreras e Díaz, 2012; Oliveira, 2013). Esse erro é denominado por Falk (1986) como *falácia da condicional transposta.* Pelo teorema da Bayes, estas probabilidades condicionadas só são iguais se A e B tiverem a mesma probabilidade.

Este erro pode levar a serias consequências, tal como o exemplo explicitado em Batanero et al (2012, p. 8): *a confusão entra a probabilidade de que uma criança afetada com síndrome de*

Down dê uma amniocentesis pré-natal[1] *positiva, que é alta e o fato de que, sendo o diagnóstico positivo a criança realmente tenha síndrome de Down, que é muito menor.*

Atividade que aparentemente parecem ser fáceis, mas que tem soluções contra-intuitivas, se constituem grande fonte de erros e incompreensões, tanto por parte de alunos como por professores.

2. **Antecedentes e Marco Teórico**

Falk (1986) ao investigar a *falácia da condicional transporta*, advoga que tal dificuldade pode ser proveniente da interpretação da condicionalidade como causalidade, da definição do evento condicionante e a confusão da probabilidade inversa.

Estudo realizado por Figueiredo (2000) com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática e Ciências da Computação ressalta que diante de questões que envolvam a probabilidade condicional os estudantes diferenciavam esta da probabilidade da interseção e o cálculo da P(A/B) do de P(B/A), desde que estes se apresentassem nas perguntas em linguagem natural. Quando as questões análogas eram apresentadas na linguagem simbólica, muitos alunos mostraram dificuldades em resolvê-las.

Estrada e Díaz (2006) apresentaram um estudo avaliando os "sesgos" (deslizes; desvios) no raciocínio condicional de uma amostra com 159 estudantes de Matemática, Magistério e Psicologia. Os resultados indicam que o tema não resulta fácil para estes estudantes e evidencia a necessidade de potencializar a formação estatística sobretudo entre os futuros professores de matemática.

Contreras (2011) desenvolveu em sua tese de doutoramento um conjunto de cinco estudos para compreender os conhecimentos de professores e alunos sobre probabilidade condicional e o uso de recursos didáticos na Formação de professores do ensino primário e secundário com foco na probabilidade condicional. O estudo de número 5 apresentou como um dos objetivos fazer os professores (166 participantes da Espanha, México e Portugal) experimentar uma situação didática baseada em um paradoxo clássico da teoria probabilística com intuito de aflorar alguns conhecimentos matemáticos e didáticos deste grupo concernente a probabilidade condicional. Uma proporção considerável destes professores mostrou intuições incorretas no começo da atividade – Jogo das Três Fichas e não foram capazes de dar uma demonstração matemática completa da estratégia uma vez identificada ao final do jogo. A atividade se mostrou útil para provocar a reflexão didática do professor. Em nosso caso, utilizamos este jogo com os mesmos objetivos, posto que, esperamos que os futuros professores da nossa mostra tenham os conhecimentos suficientes sobre probabilidade condicional para realizar o seu exercício docente de forma eficaz neste campo.

Escolhemos também, compondo nosso marco teórico, os estudos sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino, desenvolvido por Ball, Thames e Phelps (2008). Estes pesquisadores descrevem o conhecimento matemático para o ensino como "o conhecimento matemático que o professor usa na sala de aula para que o aluno construa o conhecimento." Logo, tomamos como

[1] A amniocentese é um método de diagnóstico pré-natal que é tipicamente aconselhado aos pais perante a probabilidade de deformações genéticas durante a gravidez.

base as categorias de conhecimentos necessários ao professor de matemática, estabelecidas por esses pesquisadores e que discorremos em seguida.

Conhecimento do conteúdo

O *conhecimento do conteúdo comum* é o conhecimento colocado em jogo por qualquer pessoa para resolver determinados problemas matemáticos. No tocante ao ensino de probabilidade condicional, o professor dos anos finais do Ensino Fundamental, deve ter a capacidade de, por exemplo, de discriminar um evento que envolve probabilidade simples de uma probabilidade condicional.

O *conhecimento do conteúdo especializado* inclui, por exemplo, aspectos como identificar ideias matemáticas que dão base a resolução de um problema. Em relação ao ensino da probabilidade condicional, o professor dos anos finais do Ensino Fundamental deveria saber a epistemologia do conceito de probabilidade em que neste processo encontramos diferentes significados. Conhecer ainda as limitações e avanços de cada significado, a saber: clássico, frequentista, subjetivo e axiomático. Discriminar entre probabilidade simples, composta e condicional. Ter capacidade para leitura em tabelas de contingência – que são usadas para registrar observações independentes de duas ou mais variáveis aleatórias, normalmente qualitativas; compreendendo ainda sobre entre independência e dependência dos dados. Com este domínio o professor pode propor situações em que ajude os estudantes a construir o conhecimento em probabilidade condicional numa perspectiva integral.

E por fim o *conhecimento horizontal do conteúdo*, que é o conhecimento da relação com outras disciplinas e as conexões intradisciplinares, a título de exemplo, com a história da matemática e da própria probabilidade.

Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O *conhecimento do conteúdo e do currículo* está relacionado com a compreensão dos programas curriculares para um determinado conteúdo. O professor, por exemplo, deve ter um conhecimento sobre a pertinência ou não da inclusão de um conteúdo em um determinado nível escolar e as implicações didáticas que advém desta escolha.

O *conhecimento do conteúdo e dos estudantes*, ou seja, o conhecimento de como os estudantes aprendem determinados conteúdos; por exemplo, o professor, ao saber que seus alunos têm dificuldades no mapeamento do espaço amostral, deve incentivar que eles busquem estratégias para a superação dessa dificuldade.

O *conhecimento do conteúdo e do ensino* é resultante da integração do conhecimento do conteúdo matemático e do ensino desse conteúdo; por exemplo, o professor poderá discutir com seus alunos diferentes registros para a determinação do espaço amostral, como tabelas de dupla entrada e diagramas de árvore. Nesse âmbito, o professor deverá também ter conhecimento de estudos e pesquisas indicando questões relativas ao ensino e aprendizagem da probabilidade condicional. Estudos que apontem uma melhor abordagem para dirimir as falácias como o caso da condicional transposta.

3. Método

Participantes. Os participantes da pesquisa foram estudantes do curso de Matemática-Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste – Universidade Federal de Pernambuco. A disciplina foi a de Estatística e Probabilidade, em sua maioria, estudantes do 2º período e 3º período. Participaram da atividade 25 estudantes. Contudo, não há implicações para os resultados que vamos apresentar, uma vez que apresentamos as análises por atividades.

Atividade – Jogo das Três Fichas. Propomos esta atividade para permitir aos estudantes a ressignificação e/ou mesmo a construção do conhecimento sobre probabilidade condicional, mobilizando o conhecimento específico do conteúdo. Pretendemos por meio dessa atividade que os licenciandos – futuros professores – reflitam suas dificuldades e seu rebatimento nas suas futuras salas de aula. Para isto, lançamos mão do Jogo das Três Fichas apresentado por Contreras em diversas publicações (Contreras, 2001; Contreras, Batanero, Arteaga, e Cañadas 2012; Batanero, Contreras, Díaz e Cañadas, 2014). Este jogo foi sistematizo com base no Paradoxo das Caixas de Bertrand, assim conhecido por ter sido estudado pelo matemático francês do século XIX Joseph Bertand. O jogo tem o seguinte enunciado:

> *Se tomam 3 fichas da mesma forma e tamanho, das quais uma é vermelha em ambas as faces; outra é azul por uma face e vermelho na outra e a terceira é azul nas duas faces. O professor coloca as três fichas em uma caixa, que agita convenientemente, antes de selecionar uma das três fichas ao azar. Mostra uma das faces da ficha, mantendo a outra escondida, pedindo a seus alunos que adivinhem a cor do lado oculto. Uma vez feita as apostas, o professor mostra o lado oculto. Cada aluno que tenha acertado a previsão efetuada consegue um ponto.*

Temos como objetivo aflorar nos professores alguns conhecimentos matemáticos e didáticos com relação a probabilidade condicional. Além de confrontá-los por meio das suas estratégias articulado ao conceito de probabilidade condicional.

Os estudantes receberam uma folha de registro com o enunciado e espaço para os demais registros que a atividade solicita. Cada estudante deve apresentar sua estratégia e argumentar sobre a estratégia escolhida. Foi disponibilizado um espaço para o debate coletivo e decidir qual é a melhor estratégia e analisar os diferentes argumentos envolvendo a probabilidade condicional.

Análise dos Dados. Para análise dos dados adotamos uma perspectiva de análise qualitativa e não apenas quantitativa com base em acerto e erros. Os protocolos foram analisados por diversas vezes para definição das variáveis e categorias.

Por meio dos protocolos, das estratégias adotadas e do debate em sala de aula pudemos levantar dados para uma análise mais ampla ao qual estamos apresentando neste texto. E ainda, no que diz respeito aos conhecimentos necessários ao ensino de probabilidade, consideramos as categorias apresentadas por Ball *et al* (2008) tal qual discutido no capítulo acima, porém para análise da atividade aqui apresentada, nosso foco centra-se no *conhecimento comum do conteúdo* e no *conhecimento especializado do conteúdo* de probabilidade.

4. Resultados e discussões

Tomamos para nossa análise as estratégias descritas em Contreras (2011) e Contreras, Díaz, Batanero e Ortiz (2010), a saber:

E1 – Apostar na mesma cor da face que se vê (correta);

E2 – Apostar na cor contrária da que se mostra;

E3 – Considerar que não utilizou nenhuma estratégia - escolha aleatória;

E4 – Eleger uma das cores em todos os ensaios;

E5 – Uso dos resultados anteriores para a escolha;

E6 – Mudar as estratégias ao longo da sequência dos ensaios;

E7 – Propriedades não físicas das tarjetas.

Analisando as estratégias iniciais (primeira jogada), temos a tabela abaixo que apresenta a frequência absoluta dos tipos de estratégias e as respectivas porcentagens com relação a estratégia inicial.

Tabela 1: Estratégias Iniciais

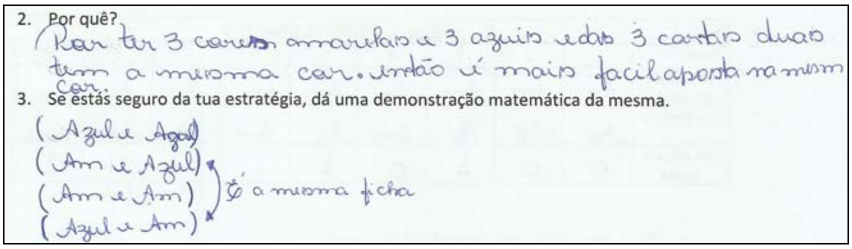
Estratégias	*Freq.*	*Porc. (%)*
E2	5	20,0
E3	17	68,0
E4	1	4,0
E5	2	8,0
TOTAL	25	100,0

Os índices nos revelam que um maior grupo de licenciandos (68%) considerou que não utilizavam nenhum tipo de estratégia em suas apostas ou que apostavam aleatoriamente (E3). Alguns argumentos errôneos apresentavam uma ideia de que os resultados de dar uma das cores seriam equiprováveis. Nenhum dos participantes elegeu a estratégia correta "E1" como estratégia inicial. Esses resultados estão na mesma direção dos resultados de Contreras (2011) em que a E3 é a de maior índice (47,6%) de indicações dos participantes da sua pesquisa com 166 professores em exercícios e futuros professores.

No segundo momento da atividade, realizava-se outro sorteio e desta vez era solicitado aos estudantes, além de identificar a estratégia elegida por eles, deveriam apresentar uma demonstração matemática para a mesma. Temos que 61,5% apresentaram uma demonstração matemática, enquanto que 38,5% não responderam este item.

O problema pode ser resolvido de diversas formas e sem necessariamente utilizar a formula da probabilidade condicional. Uma solução correta e mais intuitiva é observar que das 3 fichas, duas tem a mesma cor. Ao sortear uma ficha aleatoriamente temos três possibilidades (as três fichas). Os casos favoráveis são as duas fichas de mesma cor. Logo, a probabilidade de face oculta = face visível é igual a probabilidade de duas faces iguais, ou seja, 2/3.

Dos estudantes que responderam (61,5%), os mesmos utilizaram frações, porcentagens, combinações e diagramas das possibilidades para demonstrar sua estratégia. A seguir, apresentamos três protocolos com as justificativas e estratégias.


2. Por quê?

(Por ter 3 cartas amarelas e 3 azuis e das 3 cartas duas tem a mesma cor. então é mais facil aposta na mesma cor.

3. Se estás seguro da tua estratégia, dá uma demonstração matemática da mesma.

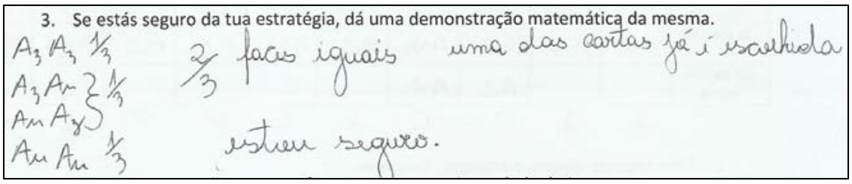
(Azul e Azul)
(Am e Azul)
(Am e Am)
(Azul e Am)
É a mesma ficha

Figura 1: protocolo nº 15

O estudante acima aponta para a resposta correta da probabilidade que é de 2/3. No entanto, ao explicitar sua demonstração matemática se confunde ao mapear o espaço amostral e seu argumento se torna errôneo. É preciso levar em consideração o fato de que mesmo que a possibilidade "Az1 e Az2" e "Az2 e Az1" represente fisicamente a mesma ficha, mas são possibilidades diferentes dentro do espaço amostral. O protocolo demonstra que o estudante consegue considerar isto para as fichas de cores diferentes, mas não o faz para as fichas de mesma cor. O correto seria explicitar as diferentes faces que se tem com as fichas, uma representação poderia ser a seguinte:

Ficha amarela nas duas faces (Am1 e Am2), Ficha azul nas duas faces (Az1 e Az2) e Ficha Azul em uma face e amarela na outra (Am e Az). O espaço amostral compreenderia os seguintes resultados: Am1_Am2; Am2_Am1; Az1_Az2; Az2_Az1; Am_Az; Az_Am.

Como observamos, temos quatro resultados favoráveis dentre todos os seis resultados possíveis, pela regra de Laplace, a probabilidade é de 4/6 ou 2/3. Observemos agora a resolução do próximo estudante.


3. Se estás seguro da tua estratégia, dá uma demonstração matemática da mesma.

Az Az 1/3 2/3 faces iguais uma das cartas já é escolhida

Az Am } 1/3

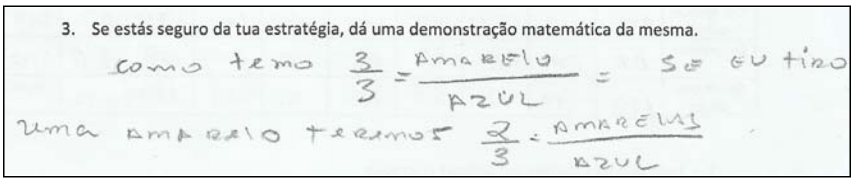
Am Az

Am Am 1/3 estou seguro.

Figura 2: protocolo nº19

O estudante apresenta uma dificuldade para construir um argumento correto com base no espaço amostral, também como no protocolo anterior. O que destacamos deste estudante é a frase *"uma das cartas já é escolhida"* que sinaliza uma noção do significado da probabilidade condicional.

Para chegar a uma demonstração correta utilizando a probabilidade condicional, poderia se pensar na resposta à seguinte pergunta: Qual a probabilidade de ocorrer Am dado que Am já tenha ocorrido? Como nos estudos de Falk (1986) entender este evento condicionante não é tarefa fácil para os estudantes. Utilizando o algoritmo do cálculo da probabilidade condicional "P(Am|Am) = P(Am ∩ Am) / P(Am)" encontramos (1/3) / (1/2) = 2/3. De forma análoga para a cor azul. E para confirmar utilizando a ficha de cor diferente: Qual a probabilidade de ocorrer Am dado que Az já tenha ocorrido? Encontramos como resposta (1/6) / (1/2) = 1/3. De forma análoga encontramos o mesmo resultado trocando as cores. Assim, a probabilidade de apostar na mesma cor é maior e se torna em uma estratégia mais sabia. Observemos mais um protocolo.


3. Se estás seguro da tua estratégia, dá uma demonstração matemática da mesma.

como temo $\frac{3}{3} = \frac{\text{amarelo}}{\text{azul}}$ = se eu tiro

uma amarelo termos $\frac{2}{3} = \frac{\text{amarelas}}{\text{azul}}$

Figura 3: protocolo nº5

Já este estudante da figura 3 apresenta um argumento errôneo e que o leva para uma resposta incorreta. O que o mesmo realiza como demonstração matemática é o estabelecimento da razão entre a quantidade de amarelos e quantidade de azuis. Esse é um erro comum e que envolve o significado da probabilidade clássica.

Após a realização do jogo e dos questionamentos que a atividade possibilita começamos a discutir situações em que é necessário calcular a probabilidade de um evento dado que outro já tenha ocorrido e assim sistematizar o conceito de probabilidade condicional a que esta atividade propicia. Além disto, houve uma reflexão sobre a utilização deste jogo como um recurso didático que faz aflorar confusões ao se raciocinar condicionalmente.

5. Considerações finais

Estes resultados são motivos de preocupação, na formação inicial dos estudantes do curso de Matemática-Licenciatura, uma vez que se aos mesmos não for propiciada uma vivência de situações que mobilizem os conhecimentos necessários ao ensino, os professores tenderão a falhar no ensino de probabilidade, bem como em algumas atividades profissionais que requerem o raciocínio probabilístico, tais como compreender o que os alunos sabem e ainda, decidirem estratégias didáticas de ação para dirimir tais dificuldades.

Defendemos, com base nos estudos aqui apresentados, que os licenciandos devem na sua formação inicial entrar em contato com atividades que mobilizem e avancem os conhecimentos necessários para os processos de construção do conceito de probabilidade. Devem dominar os diferentes significados de probabilidade, da probabilidade condicional e das noções que sustentam este conhecimento. Devem ter em seu repertório situações didáticas para a sua futura prática profissional. É necessário conhecer as implicações didáticas das abordagens que discutimos para um melhor planejamento do seu ensino sobre probabilidade.

Ao mobilizar tais conhecimentos com os licenciandos estaremos avançando na transição do *conhecimento comum* para o *conhecimento especializado de probabilidade,* e que, reverbere no Conhecimento Matemático para o Ensino de Probabilidade Condicional.

Referências

Ball, D., Thames, M. H. e Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Educacion* 5, 389-407. Disponível em: http://jte.sagepub.com/content/59/5/389.

Batanero, C., Contreras, J. M. e Díaz, C. (2012). Sesgos em el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet. 12* (2).

Batanero, C., Contreras, J.M., Díaz, C. e Cañadas, G. (2014). Preparing teachers to teach conditional probability: a didactic situation based on the Monty hall problem. In Wassong, T., Frischemeier, D., Fischer, P., Hochmuth, R., & Bender, P. (Eds). *Mathematik- und Stochastiklernen mit Werkzeugen - Using Tools for Learning Mathematics and Statisti*cs (pp. 363-376). Wiesbaden, Germany: Springer Spektrum.

Contreras, J. M. (2011). Evaluación de conocimientos de futuros profesores y recursos formativos sobre la probabilidad condicional. Tese Doctoral–Universidade de Granada.

Contreras, J. M., Batanero, C., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2012). La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas. *Epsilon, 28*(2), 7-20. .

Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C. y Ortiz, J. J. (2010). Razonamiento probabilístico de profesores y su evolución en un taller formativo. *Educaçao Matemática e Pesquisa, 12* (2), 181-198.

Estrada, A., Díaz, C. e De la Fuente, I. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo e T. Sierra (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIV* (p.271-280). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Falk, R. Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Figueiredo, A. C. (2000). *Probabilidade condicional: Um enfoque de seu ensino e aprendizagem.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

Oliveira, F. F. de. (2013). Registros de representações semióticas no ensino de probabilidade condicional. *Anais do XVII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática.* Vitória – ES.