

Dificultades en el desarrollo de una concepción estocástica de las distribuciones muestrales utilizando un ambiente computacional

Santiago Inzunza Cazares

sinzunza@uas.edu.mx, Universidad Autónoma de Sinaloa

Resumen

En el presente artículo reportamos resultados de una investigación realizada con 22 estudiantes universitarios del área de ciencias sociales sobre el razonamiento e imágenes que construyen sobre conceptos de población, muestra, variabilidad muestral, efecto del tamaño de muestra y error de muestreo, los cuales son parte esencial en el desarrollo de una concepción estocástica de la inferencia estadística. Los resultados muestran que los estudiantes adquirieron algunos elementos que caracterizan una concepción estocástica del muestreo cuando respondieron diversas preguntas, recién concluidas las actividades de simulación, tales como identificación correcta de la variabilidad muestral mediante un intervalo, efecto del tamaño de muestra en el error muestral y la forma y variabilidad de una distribución muestral. Sin embargo, cuando se les administró un cuestionario días después, varios estudiantes no lograron distinguir gráficamente una población de una distribución muestral, y no tuvieron claridad en la idea de que los datos que se representan en la distribución muestral son estadísticos calculados sobre una muestra –en este caso la media-. Se identificaron imágenes erróneas sobre la idea de población y variabilidad desde un punto de vista gráfico que obstruyeron un razonamiento adecuado.

Palabras clave: Población, muestra, variabilidad muestral, simulación.

1. Introducción

Una distribución muestral representa el valor que puede tomar un estadístico (por ejemplo, la media o la proporción) en cada una de las muestras aleatorias de un tamaño dado que son posibles de seleccionar de una misma población. Así, en tanto los estadísticos constituyen el medio para estimar los parámetros poblacionales, el conocimiento de su distribución muestral permite determinar intervalos de valores entre los cuales se puede encontrar el parámetro de interés, o si suposiciones de valores de los parámetros, concuerdan con los valores del estadístico y su ubicación en la distribución muestral.

La enseñanza tradicional de las distribuciones muestrales y la inferencia estadística en los cursos universitarios está basada en un enfoque formal deductivo que utiliza la teoría de la probabilidad, por lo que requiere de un lenguaje matemático que está fuera del alcance de muchos estudiantes –particularmente de los estudiantes del área de ciencias sociales y humanidades-; y más importante aún, la distribución muestral descrita mediante una distribución teórica de probabilidad es difícil de asociar con el proceso real que se utiliza en la selección de muestras de una población (Lipson, 2002; Meletiou-Mavrotheris, 2004).

Las fuentes de dificultad asociadas a las distribuciones muestrales son de diversa índole. Chance, delMas y Garfield (2004) sugieren que la complejidad del tema se debe a que requiere la integración y combinación de muchas ideas de estadística y probabilidad, tales como aleatoriedad, distribución, muestra, población, variabilidad y muestreo. Lipson (2002), sostiene

que la dificultad en su comprensión está asociada a la idea de muestra, al proceso de muestreo, así como a la diversidad de representaciones matemáticas y simbólicas que el concepto posee. Saldanha y Thompson (2002) por su parte consideran problemático que los estudiantes tienden a enfocarse en muestras individuales y resúmenes estadísticos de ellas, en vez de enfocarse en cómo se distribuyen las colecciones de estadísticos muestrales. Desde nuestra perspectiva, el enfoque formal que prevalece en la enseñanza de la inferencia estadística, además de las dificultades que entraña para los estudiantes con pocos antecedentes matemáticos, no hace visible las relaciones que existen en los conceptos y las relaciones que intervienen, al enfocarse más en el resultado que en el proceso, y limitarse al uso de fórmulas en la que se sustituyen datos y utilizar tablas de probabilidad para obtener resultados, dando con ello una imagen estática y determinista de la inferencia, cuando es la variabilidad parte central en su estudio. Diversas investigaciones sugieren una enseñanza que clarifique la forma en que se relacionan e intervienen todos estos conceptos como paso previo al estudio de los métodos formales de la inferencia, con lo que se pretende que los estudiantes, además de comprender los métodos y sus resultados, desarrollen un razonamiento inferencial adecuado para la vida cotidiana y la profesión.

Algunos autores (Liu y Thompson, 2007; Konold y Kazak, 2008) han hecho un llamado para desarrollar una concepción estocástica de la probabilidad y la inferencia estadística desde edades tempranas, esto es, concebir a los eventos y al muestreo como procesos estocásticos o aleatorios para que los estudiantes vayan desarrollando ideas intuitivas correctas sobre probabilidad, poblaciones, muestras, variabilidad muestral, distribuciones muestrales y efecto del tamaño de muestra. Este acercamiento a los conceptos de inferencia desde una perspectiva informal requiere del uso de herramientas tecnológicas con amplio potencial de representaciones visuales dinámicas para generar imágenes correctas de estos conceptos en los estudiantes.

En el presente trabajo nos hemos propuesto analizar el razonamiento e imágenes que estudiantes universitarios de ciencias sociales construyen sobre conceptos que forman parte de las distribuciones muestrales, los cuales son parte esencial en el desarrollo de una concepción estocástica de la inferencia estadística. Utilizamos un ambiente computacional como el que proporciona el software Geogebra (Hohenwarter, 2001), software libre que en los años recientes ha cobrado especial importancia en la enseñanza de las matemáticas por su potencial cognitivo basado en el uso de representaciones dinámicas múltiples de los conceptos matemáticos.

2. Marco teórico

2.1. Concepción estocástica del muestreo

Conceptualizar el muestreo de poblaciones, la variabilidad muestral, los efectos del tamaño de muestra y la toma de decisiones bajo incertidumbre, involucra concebir situaciones generadoras de datos como procesos estocásticos o procesos aleatorios (Pfannkuch et al, 2012). En el caso particular de la probabilidad, Liu y Thompson (2007, p. 122) caracterizan un concepción estocástica de la siguiente manera: “una persona con una concepción estocástica o aleatoria de un evento concibe un resultado observado como una expresión de un proceso subyacente repetible, el cual después de una gran cantidad de repeticiones producirá una distribución estable de resultados”. Pfannkuch et al. (2012) extienden dicha concepción al muestreo y la inferencia estadística. Una concepción estocástica del muestreo significa:

1. Concebir el muestreo como un proceso aleatorio. Esto es, seleccionar una muestra de la población, registrar el dato de cada elemento de la muestra y calcular el estadístico en cuestión para estimar el correspondiente parámetro de la población.
2. Imaginar muestras de un mismo tamaño tomadas repetidamente y registrar el valor del estadístico en cada una de ellas.
3. Comprender que este proceso producirá una colección de resultados que serán en su mayoría diferentes del parámetro poblacional que deseamos estimar (la distribución muestral).
4. Comprender que debido al proceso de selección aleatoria hay variabilidad en los resultados, pero en una gran cantidad de repeticiones la distribución de los resultados llegará a ser estable y centrada en el verdadero valor del parámetro.

2.2. La computadora como herramienta cognitiva

En la literatura de educación estadística (Efron, 2000; Mills, 2002) se sugiere con frecuencia la utilización de simulación computacional para la enseñanza de las distribuciones muestrales y la inferencia estadística como medio para desarrollar una comprensión adecuada del amplio recurso conceptual que subyace a los métodos de inferencia. La interactividad y la multiplicidad de representaciones visuales dinámicas de las que disponen las herramientas de software que existen en la actualidad, así como el poder de simulación para extraer una gran cantidad de muestras de una población casi de forma simultánea, pueden ayudar a que los estudiantes accedan a las grandes ideas de la inferencia de una forma que hasta hace poco tiempo no era accesible a través de un ambiente de lápiz y papel.

Pea (1987) se refiere a este potencial de la tecnología computacional como “metáfora reorganizadora”, que cuando es utilizada adecuadamente, tiene la capacidad para provocar cambios estructurales en el sistema cognitivo de los estudiantes a través de una reorganización y transformación de las actividades que ellos realizan con las representaciones y sus transformaciones. Pea define a una herramienta cognitiva como cualquier medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente, en el pensamiento, en el aprendizaje y las actividades de resolución de problemas. Particularmente, en el caso de las computadoras, constituyen una extraordinaria y potente herramienta cognitiva para aprender a pensar matemáticamente; con ellas se pueden operar no solo números, sino también símbolos, y permiten almacenar y manipular símbolos dinámicamente y permiten interacciones con los usuarios en tiempo real. En este sentido, el aspecto representacional y de cálculo de la tecnología, adquiere especial importancia en el desarrollo de imágenes visuales de los conceptos y sus conexiones, que les puede ayudar a los estudiantes a desarrollar imágenes mentales correctas y comprender de forma adecuada el proceso subyacente a una inferencia.

3. Metodología

La investigación se llevó a cabo con 22 estudiantes que tomaban un curso de probabilidad en la carrera de Estudios Internacionales y Políticas Públicas, el cual fue muy posterior al curso de estadística, algo inusual en los planes de estudio. Las actividades de enseñanza se diseñaron con el propósito de desarrollar en los estudiantes una concepción estocástica de las distribuciones muestrales. Se elaboraron dos actividades para la distribución muestral de la media y una actividad para la distribución muestral de la proporción; sin embargo, en este artículo se reportan solamente los resultados obtenidos en las actividades de la distribución muestral de la media. Antes de utilizar el ambiente computacional, se trabajó una actividad en forma experimental para ayudar a los estudiantes a fijar ideas sobre el proceso de selección de muestras de una población y los conceptos que se involucran, y así facilitar el proceso de

simulación y los cálculos de estadísticos que posteriormente se realizaron con el software Geogebra. Para el caso específico de distribuciones muestrales, el software dispone de una hoja de cálculo con diversos comandos y una ventana gráfica que permiten simular y visualizar el proceso de selección de muestras de una población y el comportamiento de una distribución muestral en forma numérica y gráfica.

La estructura de cada actividad consistía en que dada una población de datos, se calcula la media y la desviación estándar; enseguida se obtiene una muestra de la población y se calcula su media muestral, entonces el proceso se repite muchas veces para generar una colección numérica y gráfica con las medias calculadas (distribución muestral empírica) a la que se calcula su media y su error estándar. Enseguida se aumenta el tamaño de la muestra seleccionada y se realiza el mismo proceso de cálculo y graficación. Adicionalmente, se calcularon los errores muestrales para los tamaños de muestra. Al final de cada actividad se proporcionó una hoja de trabajo donde los estudiantes respondieron varias preguntas que buscaban explorar su comprensión. Además se utilizaron un cuestionario de evaluación y entrevistas a con tres estudiantes.

4. Resultados y Discusión

a) Simulación física del muestreo

Se formaron equipos de 3 y 4 estudiantes y se pidió a cada uno que escribiera en un pequeño papel la cantidad de contactos que tiene en su red social favorita y lo colocara en una urna. En la hoja de trabajo se les pidió que describieran la población mediante su media aritmética y desviación estándar. Enseguida debían seleccionar una muestra de tamaño 5, calcular su media aritmética y registrarla en una tabla. El procedimiento anterior lo repetían 20 veces y al final graficaron las medias muestrales en un diagrama de puntos y calcularon la media de la distribución y su desviación estándar. El mismo proceso fue realizado para muestras de tamaño 10. No obstante que se trataba de la primera parte de la actividad, algunos estudiantes mostraron sentido de la variabilidad en las muestras y de algunas propiedades de las distribuciones muestrales. Por ejemplo un equipo escribió lo siguiente: *“cuando el tamaño de muestra es más grande, la diferencia de la media con respecto a la media de la población disminuye. De la misma manera, la desviación estándar que expresa la dispersión de los datos disminuye cuando la muestra es mayor”*. Otro equipo señaló: *“aunque las muestras sean aleatorias, el resultado no varía mucho, entre más grande es el tamaño de muestra la desviación estándar es menor y el resultado es más exacto”*

b) Simulación computacional del muestreo

Posterior a la simulación física donde se extrajeron muestras de la población representada por el número de contactos en redes sociales de los estudiantes, se procedió a realizar la simulación con el software Geogebra. Después de calcular medidas descriptivas de la población (media y desviación estándar) se extrajeron muestras de tamaño 5 y se calculó la media muestral a cada una hasta completar 500 muestras. Una vez construida la distribución muestral empírica se procedió a calcular su media y desviación estándar. El mismo proceso se repitió para muestras de tamaño 10, 20 y 30. Adicionalmente se calculó el error de cada muestra para los tamaños 5 y 30 (ver Figura 1). La actividad 2 consistió de una población con datos de los estímulos económicos (pesos por quincena) que reciben 300 profesores universitarios (ver Figura 2) y se procedió en el mismo sentido que en la actividad 1. Una vez concluida cada actividad, los estudiantes completaron una hoja de trabajo donde respondieron diversas preguntas con lo que se pretendía explorar conceptos como:

1. Relación entre tamaño de muestra y variabilidad de la distribución muestral.
2. Relación entre el tamaño de muestra y la forma de las distribuciones muestrales.
3. Efecto del tamaño de muestra en el centro de las distribuciones muestrales.
4. Cálculo del error muestral y el efecto del tamaño de muestra.
5. Identificación de un intervalo intuitivo que comprende un porcentaje de medias muestrales.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
Número de contactos			Medias Muestrales n=5	Medias Muestrales n=10	Medias Muestrales n=20	Medias Muestrales n=30	Error Muestra=5	Error Muestra=30
400	Media Poblacion	460.18	397	456.1	339.85	393.9	63.18	66.28
500	Desviacion Poblacion	411.33	643.2	670.9	467.5	499.07	183.02	38.88
985			894	258.2	620.7	497.37	433.82	37.18
129	Media Muestra n=5	456.66	371.6	529.4	466.55	548.13	88.58	87.95
1624	Desviacion Estandar n=5	186.23	505.8	362	554.15	536.3	45.62	76.12
29			671.6	469.6	407.5	520.57	211.42	60.38
500	Media Muestra n=10	448.35	639.8	519.4	572.3	530.83	179.62	70.65
82	Desviacion Estandar n=10	124.26	725.2	499.5	675.55	386.03	265.02	74.15
299			497.4	354.7	492.15	525.8	37.22	65.62
308	Media Muestra n=20	451.31	266.6	386.3	611	366.67	193.58	93.52
220	Desviacion Estandar n=20	95.51	493.2	461.4	358.95	538.87	33.02	78.68
50			381.6	447.2	707.45	525.9	78.58	65.72
116	Media Muestra n=30	464.38	283.2	638.5	331.85	612.47	176.98	152.28
76	Desviacion Estandar n=30	72.36	508.4	360.9	520.95	445.77	48.22	14.42
800			233.8	351.9	736.25	374.83	226.38	85.35

Figura 1: Hoja de cálculo de Geogebra con simulación de muestras (Actividad 1)

D	E	F	G	H	I	J	K	L
Estímulo (pesos quincen...			Medias muestrales n=10	Medias muestrales n=30	Medias muestrales n=50	Errores muestrales n=10	Errores muestrales n=30	Errores muestrales n=50
3620.94	Media poblacion	3268.45	3338.4	3241.68	3306.35	69.95	26.77	37.9
2569.47	Desviación estándar poblacional	956.76	3294.52	3342.08	3097.45	26.07	73.63	171
2 Número D3			3276.42	2777.5	3394.07	7.97	490.96	125.62
2550.65	Media muestral n=10	3270.32	2940.43	3201.68	3101.56	328.02	66.78	166.89
2704.2	Desviación estándar muestral n=10	294.34	3665.52	3271.44	3309.69	397.07	2.99	41.24
2274.57			2951	3517.45	3114.45	317.45	249	154
2327.3	Media muestral n=30	3274.83	3030.55	2971.83	3032.62	237.9	296.62	235.83
2274.57	Desviación estándar muestral n=30	172.49	3357.77	3326.61	3461.92	89.31	58.16	193.47
1940.51			3006.35	3143.1	3160.75	262.1	125.35	107.7
2274.57	Media muestral n=50	3268.11	3159.47	3028.01	3222.26	108.99	240.44	46.2
2642.93	Desviación estándar muestral n=50	140.68	3436.89	3122.49	3419.41	168.44	145.97	150.95
2550.65			3202.19	3569.58	3239.13	66.27	301.13	29.33
2857.71			3465.33	3006.39	3134.36	196.87	262.07	134.1

Figura 2: Hoja de cálculo de Geogebra con simulación de muestras (Actividad 2)

Al final se requería que los estudiantes escribieran sus conclusiones sobre el comportamiento de las distribuciones muestrales y los conceptos involucrados. A continuación se muestran algunas respuestas representativas:

“Las muestras nos ayudan a llegar a resultados acertados aunque no exactos. En este caso los datos tienden a agruparse cuando la muestra aumenta, en el caso del diagrama de caja, al igual cuando la muestra aumenta la mediana y tiende a ser más acertada, por último en el caso de el diagrama de caja de los errores mientras la muestra sea pequeña el error tiende a ser mayor e inversamente” (Kenia).

“En este ejercicio pudimos observar que la muestra, aunque no arroja los datos exactos de la población, nos ofrece datos con márgenes de error que son muy bajos, y el error disminuye a medida que la muestra se amplía. Con el ejercicio del error absoluto comprobamos de una manera clara esa hipótesis” (Anahí).

“Al aumentar la muestra la forma de las gráficas es más uniforme y más confiable ya que está más acomodada al centro; por otro lado la media es más cercana a la media poblacional

cada vez que la muestra aumenta; y por último la desviación estándar es cada vez menos cuando el número de la muestra aumenta reduciéndose de esta manera la dispersión” (Paúl).

“En los ejercicios trabajados pudimos observar que las muestras nos dan datos muy cercanos a los datos reales de la población con márgenes de error muy pequeños. El comportamiento es que a medida que el tamaño de las muestras aumenta los datos son más y más acertados” (Frida).

En el contexto de la actividad 2 además de explorar las relaciones anteriores, se solicitó a los estudiantes que proporcionaran un intervalo de variabilidad que les pareciera razonable en el contexto de los datos (ver Figura 3). La instrucción era la siguiente: analiza la distribución muestral para $n=30$ y determina de manera aproximada (viendo el histograma) un intervalo central que contenga el 95% de las muestras. Los resultados fueron los siguientes:

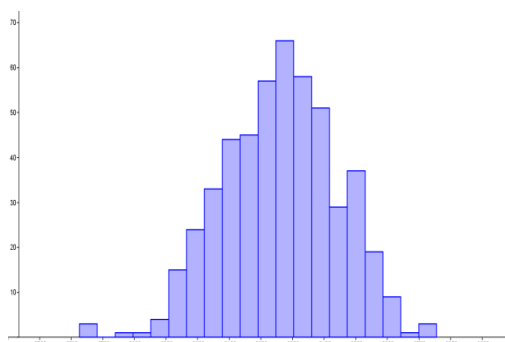


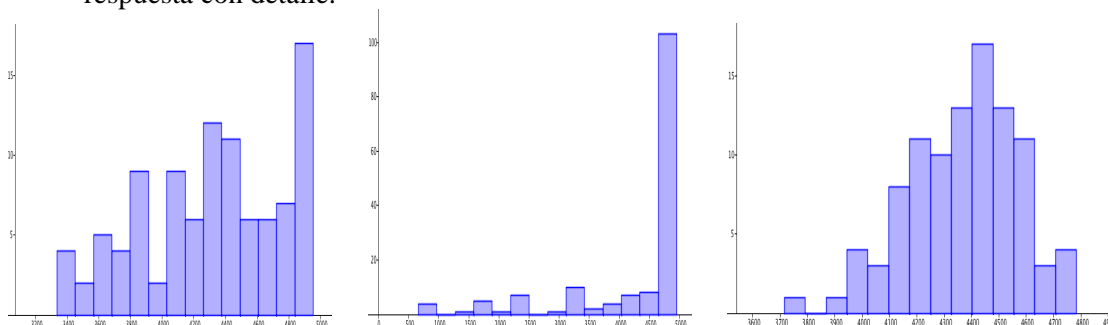
Figura 3: Distribución muestral para $n=30$ (500 simulaciones)

Tabla 1: Intervalos construidos por los estudiantes

Intervalo	Frecuencia
2900-3600	5
2900-3700	3
2800-3800	4
2700-3600	2
2700-3800	4
3000-3600	3
2700-3600	1
	22

Una semana después de concluir las actividades de simulación con Geogebra, se aplicó un cuestionario a los estudiantes para evaluar su nivel de comprensión sobre los conceptos involucrados en las distribuciones muestrales. El cuestionario contenía dos ítems que se muestran a continuación:

1. Las siguientes gráficas corresponden a una población de datos y a dos distribuciones muestrales cuyas muestras ($n=5$ y $n=15$) fueron seleccionadas de la población. Identifica la gráfica que corresponde a la población y a cada distribución muestral. Justifica tu respuesta con detalle.



En el análisis de las hojas de trabajo que se respondieron directamente de la simulación y donde se mostraba en forma numérica el comportamiento de la variabilidad muestral y las medidas descriptivas de las distribuciones muestrales, observamos que los estudiantes

mostraron una buena comprensión del efecto del tamaño de muestra. Sin embargo, en este ítem muchos estudiantes tuvieron dificultades para realizar una asignación correcta ante la falta de medidas descriptivas de la población y de las distribuciones muestrales, ya que dependían solo de la forma de la gráfica y el rango valores de las distribuciones, lo cual era suficiente para contestar correctamente. La tercera gráfica fue identificada correctamente por 17 de los 22 estudiantes. Entre sus argumentos los estudiantes hicieron referencia principalmente a la forma acampanada, como una propiedad que adquieren las distribuciones muestrales conforme se incrementa el tamaño de muestra, otros estudiantes además hicieron referencia a que era la distribución más angosta de las tres. Las otras dos gráficas fueron identificadas correctamente solo por 9 de los 22 estudiantes. Entre las respuestas más frecuentes que dieron estos estudiantes que consideraron la primera gráfica como la población es que tenía más variabilidad. En una entrevista con dos estudiantes se observó que su idea de variabilidad era incorrecta, pues la conciben como la irregularidad de una distribución, en lugar de verla como la distancia de los datos al centro de la distribución.

2. Un conjunto de 120 empresas que operan en México (mexicanas y extranjeras) reportan la cantidad de empleos que generan. Se selecciona una muestra aleatoria de tamaño 10 y se calcula la media de empleos. El procedimiento se repite 500 veces y los resultados se muestran en la Figura 4. Explica qué representan cada uno de los datos graficados en el histograma.

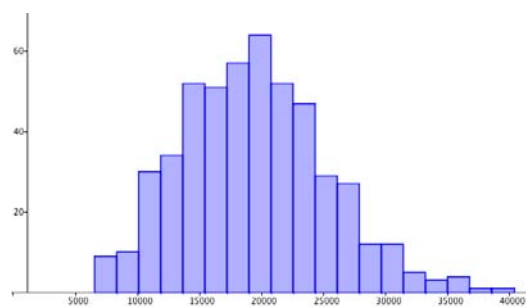


Figura 4: Distribución muestral de la media para $n=10$ (500 simulaciones)

En este ítem, solo seis estudiantes identificaron correctamente que los datos representan medias o promedios muestrales, el resto señaló que se trataba de la cantidad de empleos generados por las empresas, lo cual es cierto pero en la población de la que se extrajeron las muestras.

Para conocer a mayor profundidad los razonamientos mostrados por los estudiantes, realizamos una entrevista con tres de ellos tomando como base la actividad de simulación que realizaron en la actividad 2. A continuación mostramos algunos fragmentos de razonamientos correctos desarrollados por Paúl.

I: De la población se extrae una muestra de tamaño 5, ¿Qué representa para ti el valor obtenido?

P: Representa el promedio del estímulo de 5 profesores que resultados seleccionados en la muestra.

I: Observa la diferencia entre la media de la muestra y la media de la población, ¿Por qué no son iguales?

P: Porque las medias muestrales no dan el mismo resultado, varían de una muestra a otra.

I: ¿Qué sucede cuando incrementas el tamaño de la muestra?

P: Se acerca más a la media de la población, se parece más a la media poblacional

I: ¿Qué pasa con los errores?

- P: Pasa lo mismo, cuando se incrementa el tamaño de muestra los errores disminuyen.
- I: ¿Consideras razonable que en una muestra de empresas aparezca una media de 4000 empleos?
- P: Es razonable pero poco probable.
- I: ¿y de 5000?
- P: No creo, porque se aleja mucho de la media poblacional. Revisando no se encuentra ninguna, apenas que seleccione más muestras.
- I: ¿Puedes proporcionarme un intervalo de variación entre los cuales esperas que se encuentre la media poblacional al extraer muestras en forma repetida?
- P: Yo creo que entre 2000 a 4000.
- I: Con base en que haces la propuesta.
- P: Con base en que la media es de 3405 y la desviación de 1034.

5. Conclusiones

El ambiente computacional que proporciona el software Geogebra para el análisis de una población, la extracción de muestras y construcción de las distribuciones muestrales en forma numérica y gráfica, constituyeron una herramienta cognitiva para que los estudiantes lograran desarrollar diversos elementos de una concepción estocástica, tales como identificar la variabilidad muestral y delimitarla mediante un intervalo razonable, identificar que el tamaño de muestra influye en la variabilidad de las medias muestrales, el error muestral y la forma de las distribuciones muestrales, y sobre todo concebir al muestreo como un proceso aleatorio y repetible de una población, que aunque produce resultados que varían, estos son en la mayoría de los casos cercanos a la media poblacional. Los estudiantes dispusieron del poder de cálculo y representacional del software para tomar conciencia de ello. Sin embargo, algunos elementos de una concepción estocástica del muestreo no fueron comprendidos por todos los estudiantes, como fue el caso de lo que representan los datos en los ámbitos poblacional y muestral. En ello influyeron ideas incorrectas de una población y variabilidad desde un punto vista gráfico. Finalmente es importante resaltar que el acercamiento empírico al estudio de las distribuciones e inferencia estadística, presenta algunas ventajas sobre el enfoque formal deductivo basado en la teoría matemática de las probabilidades, pero no está exento de dificultades. Se requiere mucha investigación sobre esta perspectiva, ya que cuando los estudiantes llegan al nivel universitario poseen muchas ideas equivocadas e imágenes incorrectas de muchos conceptos de probabilidad y estadística que subyacen al proceso de muestreo.

Referencias

- Chance, B., delMas, R. & Garfield, J. (2004). Reasoning about Sampling Distributions. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. 295-323. Kluwer Academic Publishers.
- Efron, B. (2000). The bootstrap and modern statistics. *Journal of the American Statistics Association*, 95(452), 1293–1296.
- Hohenwarter, M. (2001). *Geogebra: Dynamics Mathematics for Everyone*. www.geogebra.org
- Konold, C., & Kazak, S. (2008). Reconnecting data and chance. *Technology Innovations in Statistics Education*, 2(1). [http:// repositories.cdlib.org/uclastat/cts/tise/vol2/iss1/art1/](http://repositories.cdlib.org/uclastat/cts/tise/vol2/iss1/art1/).
- Lipson, K. (2002). The role of computer based technology in developing understanding of the concept of sampling distribution. En B. Phillips (Editor). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town South Africa.
- Liu, Y., & Thompson, P. (2007). Teachers' understandings of probability. *Cognition and Instruction*, 25(2), 113–160.

- Meletiou-Mavrotheris, M. (2004). Technological tools in the introductory statistics classroom: Effects on student understanding of Inferential Statistics. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 265-297. Kluwer Academic Publishers. Netherlands
- Mills, J. D. (2002). Using Computer Simulation Methods to Teach Statistics: A Review of the Literature. *Journal of Statistics Education* 10(1). [en línea] Recuperable en <http://www.amstat.org/publications/jse/v10n1/mills.html>.
- Pea, R. (1987). Cognitive Technologies for Mathematics Education. En A. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers
- Pfannkuch, M., Wild, Ch. & Parsonage, R. (2012). A conceptual pathway to confidence intervals. *ZDM Mathematics Education*, 44 (899-911).
- Saldanha, L. & Thompson, P. (2002). Student's Scheme-based Conceptions of Sampling and its Relationship to Statistical Inference. En Meuborn D., Sztajn P., White D., Wiegel H & Nooney K. (Eds.). *Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1305-1316. Athens, Georgia
- Wild, Ch., Pfannkuch, M., Regan, M. & Horton, N. J. (2011). Towards more accessible conceptions of statistical inference. *Journal of the Royal Statistical Society Series A*. 171(2), 247-295.