Evaluación de sesgos probabilísticos en futuros profesores: Tratamiento de un problema irresoluble

Contreras García, José Miguel[1]; Arteaga Cezón, Pedro[2]; Cañadas de la Fuente Gustavo R[3] y Gea Serrano, María Magdalena[4]

[1]jmcontreras@ugr.es, Universidad de Granada
[2]parteaga@ugr.es, Universidad de Granada
[3]grcanadas@ugr.es, Universidad de Granada
[4]mmgea@ugr.es, Universidad de Granada

Resumen

Los sesgos probabilísticos son un problema extendido en los futuros profesores, como demuestran las investigaciones recientes, llegado a influir considerablemente en el razonamiento probabilístico de éstos. El problema se agrava cuando estos errores llegan al punto de influir en el futuro académico del estudiante, ya no solo porque el futuro profesor cometa estos sesgos, sino porque sea la institución que pretende evaluar al estudiante la que los comete.

Este trabajo evalúa, en futuros profesores, un problema de una prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años. El estudio compara los resultados de la muestra principal (alumnos de 4º y 5º de la licenciatura de matemáticas de la Universidad de Granada) con una muestra de alumnos de primer año del Grado de Primaria de la Universidad de Granada, que no cursaron aún docencia en probabilidad, y que poseen unos conocimientos probabilísticos adquiridos es su etapa preuniversitaria.

Palabras clave: Sesgos probabilísticos, Futuros profesores, Evaluación, Pruebas de acceso.

1. Introducción

En las investigaciones sobre errores de razonamiento probabilístico se hace hincapié en la necesidad de tratar el problema desde la base, por lo que ha de ser el profesor encargado de su enseñanza el que debiera reconocer estos sesgos en sus estudiantes, ayudarles a superarlos y prepararlos para la correcta toma de decisiones en su vida personal y profesional. El problema radica en la preparación específica de los profesores, que en muchos casos puede ser insuficiente e incluso puede estar afectada por estos errores.

La probabilidad ha alcanzado en los últimos años una notoriedad que no tenía en las anteriores orientaciones curriculares de Educación Primaria, Secundaria y Bachillerato, principalmente por el papel de ésta en el análisis crítico que se pretende para el alumno. Sin embargo, la poca formación específica sobre el conocimiento didáctico relacionado con la enseñanza de probabilidad, principalmente en futuros profesores de bachillerato y secundaria, puede llevar a una mala adecuación de las pautas de aprendizaje. La situación es aún más crítica para los futuros profesores de Educación Primaria, puesto que algunos ni siquiera han seguido un curso completo de probabilidad durante su formación como maestros. Esto puede provocar en algunos casos concepciones incorrectas sobre las ideas de azar y probabilidad (Azcárate, 1995) y en otras lleva a los profesores, una vez incorporados a su labor docente, a tratar de reducir o incluso omitir la enseñanza de la probabilidad (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006).

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 277-287). Granada, 2015.

Franklin y Mewborn (2006) advierte de la urgencia de ofrecer una mejor educación previa a estos profesores para mejorar la enseñanza de la probabilidad en las escuelas, pero ello requiere un trabajo previo de evaluación.

En este trabajo analizamos las dificultades ante un problema, que fue incluido en una prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años en una muestra de futuros profesores españoles de Educación Secundaria profesores de educación primaria. Se compara los resultados de la muestra principal (alumnos de 4º y 5º y agregados de la licenciatura de matemáticas) con la muestra de alumnos de primer año, que no cursaron aún docencia en probabilidad, y que poseen unos conocimientos probabilísticos adquiridos es su etapa de secundaria y bachillerato.

2. Antecedentes

Los profesores de matemáticas de educación secundaria y bachillerato son mayoritariamente licenciados en matemáticas y estudiaron uno o más cursos de estadística en su etapa universitaria. Pero, en general, la formación que tuvieron fue teórica y no tienen experiencia con estudios de estadística aplicada, muestreo, o diseño de experimentos (Franklin y Mewborn, 2006). Generalmente, en pocos casos los profesores tienen formación específica en didáctica de la estadística, pues, aunque en España todos realizaron el Curso de Aptitud Pedagógica o el Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria, donde realizaron cursos de didáctica de la matemática, los principios generales que son válidos para otras áreas de las matemáticas no siempre pueden ser aplicados a la estadística (Batanero, Godino y Roa, 2004). La situación de los maestros de primaria respecto a la probabilidad, y no digamos ya la probabilidad condicionada, es preocupante, debido generalmente a la poca formación recibida en el campo de la probabilidad, pues hasta hace poco ni siquiera se incluía en el currículo de educación primaria.

La mayoría de las investigaciones en este campo están relacionadas con la comprensión conceptual. Son destacables las investigaciones de Maury (1986) y Totohasina (1992) sobre comprensión intuitiva de la probabilidad condicional en contexto de extracción de bolas en urnas y otro de ruletas. Los autores indican que parte de los errores en la resolución de problemas de probabilidad condicional son debidos a dificultades de identificación y restricción del espacio muestral. Algunos estudios hacen referencia a la desigualdad de predilección por la enseñanza de conocimientos probabilísticos por parte de los dos grupos de profesores. Por ejemplo Watson (2001) y Pereira-Mendoza (2002), que evaluaron profesores de primaria y secundaria, indican que los profesores de secundaria tienen un nivel de seguridad significativamente más alto que los de primaria a la hora de enseñar conceptos básicos de probabilidad.

Respecto a los sesgos tratados en la investigación podemos encontrar diferentes investigaciones, como la de Díaz (2007) con alumnos de psicología o las de Contreras (2011), Díaz, Contreras, Batanero, y Roa (2012) con alumnos matemáticas y futuros profesores de secundaria, que hacen hincapié en evaluar las falacias más comunes relacionadas con la probabilidad. Autores como Kelly y Zwiers (1986) hacen énfasis en la evaluación de lenguaje como problemática en la compresión probabilística y percepción de independencia. Por ejemplo, la confusión entre exclusividad e independencia. En el mismo sentido Pollatsek, Well, Konold y Hardiman (1987) y Ojeda (1995) coinciden en que muchas de las dificultades respecto a la comprensión de la probabilidad condicional pueden deberse al lenguaje coloquial, en el que por ejemplo, la conjunción "y" que pueden llevar a confundir la probabilidad condicional con la conjunta ya que puede llevar a la interpretación de la intersección como condicionamiento.

Otros sesgos son propios de la probabilidad condicional, por ejemplo la falacia de las tasas base (Tversky y Kahneman, 1982), consistente ignorar la probabilidad a priori de un suceso en problemas que involucran la probabilidad inversa. Es decir, se ignoran datos del problema. Este tipo de razonamiento también ha sido descrito por Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares (2001), Díaz y de la Fuente (2007) y Contreras (2011); la falacia de la condicional transpuesta, definida como la confusión de las probabilidades P(A/B) y P(B/A) (Falk, 1986). Batanero, Estepa, Godino y Green (1996) encontraron esta misma confusión en la interpretación de tablas de contingencia donde se confunden las dos frecuencias condicionales relacionadas con una misma celda de datos. Otro sesgo es la falacia del eje de tiempo consistente en la creencia de que un suceso no puede condicionar otro que ocurra anteriormente. Gras y Totohasina (1995) indican que los estudiantes asocian el condicionamiento con el orden temporal de los sucesos y no encuentran natural que se condicione un suceso por otro que ocurre con posterioridad. O la falacia de la conjunción o la creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que cada uno de ellos por separado (Tversky y Kahneman, 1982).

3. Evaluación de la interpretación de enunciados probabilísticos

3.1. Muestra y contexto educativo

La recogida de datos se realizó durante el curso 2012-2013. La muestra completa, compuesta de estudiantes de la Universidad de Granada, está formada por un total de 180 alumnos, repartidos en dos submuestras de 90 alumnos, de la licenciatura de Matemáticas (alumnos de 4º y 5º curso) y Grado de Maestro en Educación Primaria (alumnos de 1ºcurso) de la Universidad de Granada. El porqué de estas muestras es debido al interés por evaluar si los futuros profesores de matemáticas, ya que el cuestionario se pasó en una jornada informativa del Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas dentro de un proyecto docente sobre salidas profesionales para alumnos de la licenciatura de matemáticas, saben interpretar enunciados probabilísticos y posteriormente comparar esta muestra con la muestra de alumnos de primer año del grado de primaria. El objetivo de este estudio es discutir si la interpretación correcta o incorrecta del enunciado depende del tipo de estudio realizado, partiendo de la mejor formación en el campo de los futuros profesores de matemáticas.

Alumnos de la licenciatura de matemáticas

La muestra está formada por alumnos de los dos últimos años del grado de Matemáticas. Por la idiosincrasia de esta muestra, los futuros profesores han de poseer las competencias exigibles para la realización de tal actividad, ya que todos los participantes han realizado asignaturas en la que se trata explícitamente la probabilidad y se hace hincapié en la probabilidad condicional. Algunas de estas asignaturas son de carácter troncal, como la asignatura de segundo curso “Probabilidades y Estadística” o la de tercer curso “Ampliación de Estadística”, las dos de carácter anual. Además de estas materias, el alumno tiene la opción de elegir algunas otras asignaturas de carácter optativo íntimamente relacionadas con el tema.

Alumnos del Grado de Maestro en Educación Primaria

La muestra de 90 alumnos de primaria está formada por alumnos de dos grupos de la asignatura de Bases Matemáticas para la Educación Primaria que se oferta en el primer curso de la titulación. Estos aún no han cursado el tema en cuestión por lo que, a priori, los únicos conocimientos probabilísticos son los obtenidos en su etapa pre-universitaria.

En los criterios de acceso a la titulación, descritos por el informe Verifica de la ANECA (2010) para la titulación de Grado de maestro en educación primaria de la Universidad de Granada, el perfil del estudiante que realiza estos estudios puede estar asociado a cualquier tipo de bachillerato ya sea Arte (en el que no se estudia la probabilidad), Ciencias y Tecnología (ya descrita anteriormente) y Humanidades y Ciencias Sociales; siendo esta última la mayoritaria entre los estudiantes evaluados (1,1%, 9% y 88,9% respectivamente). Dentro de esta opción de bachillerato los alumnos pueden realizar las asignaturas Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I y II, la primera de ella es optativa ya que los alumnos tienen que elegir dos materias entre Historia del mundo contemporáneo, Latín I y Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I. En la asignatura Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I se especifica que se ha de evaluar si los alumnos son capaces de determinar la probabilidad de un suceso, analizar una situación y decidir la opción más adecuada. En el apartado número 3 “Probabilidad y estadística” se describe como contenido de la asignatura la “Asignación de probabilidades a sucesos”. En el mismo apartado de la asignatura Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II aparece como contenidos la “Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes”. Como criterio de evaluación se especifica que el alumno ha de saber asignar probabilidades a sucesos aleatorios simples y compuestos, dependientes o independientes, utilizando diagramas de árbol o tablas de contingencia.

Análisis del ítem

El problema utilizado para el estudio es un ejercicio propuesto para la prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años, curso 2009/2010, del distrito andaluz.

EJERCICIO 6

a) **(5 puntos)** En una ciudad se sabe que el 55% de las personas son mujeres y el 40% son mujeres y mayores de edad. Se elige al azar una persona y resulta ser mayor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona sea, además, mujer?

Figura 1. Enunciado original del ejercicio

Este típico problema de evaluación, es muy común encontrarlo en las pruebas de acceso, pretende obtener una solución para una probabilidad condicionada a partir de los datos proporcionados: una probabilidad simple *P*(“ser mujer”) y una conjunta *P*(“ser mujer y mayor de edad”). La pretensión en este tipo de problemas es que el evaluado sea capaz de interpretar que para su resolución es necesaria la utilización del Teorema de Bayes. Por tanto una posible resolución matemática del mismo sería la siguiente:

$$P(\text{"}ser\ mujer\text{"} \mid \text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"}) = \frac{P(\text{"}ser\ mujer\text{"} \cap \text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})}{P(\text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})}$$

Conocido que $P(\text{"}ser\ mujer\text{"} \cap \text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"}) = 0,4$, el problema radica en calcular la $P(\text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})$. Teniendo en cuenta que

$$P(\text{"}mujer\text{"}) = 0,55\,;\ P(\text{"}hombre\text{"}) = 1 - P(\text{"}mujer\text{"}) = 0,45 \text{ y}$$

$$P(\text{"}ser\ m.e.\text{"} \mid \text{"}mujer\text{"}) = \frac{P(\text{"}ser\ m.e.\text{"} \cap \text{"}mujer\text{"})}{P(\text{"}mujer\text{"})} = \frac{0,4}{0,55} = 0,73\,.$$

Podemos utilizar el Teorema de la probabilidad total para descomponer $P(\text{"}ser\ m.e.\text{"})$ como:

$$P(\text{"}ser\ m.e.\text{"}) = P(\text{"}mujer\text{"})P(\text{"}ser\ m.e.\text{"} \mid \text{"}mujer\text{"}) + P(\text{"hombre"})P(\text{"}ser\ m.e.\text{"} \mid \text{"hombre"}).$$

Por tanto: $P(\text{"}ser\ m.e.\text{"}) = 0,55 \cdot 0,73 + P(\text{"}ser\ m.e.\text{"} \cap \text{"hombre"})$.

Como en este caso desconocemos $P(\text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"} \cap \text{"hombre"})$ es imposible calcular la $P(\text{"}ser\ mujer\text{"} | \text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})$. Otra forma de tratarlo es que al no conocer la $P(\text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})$ no se puede calcular.

Es decir, nos encontramos con un enunciado de imposible resolución y que engloba muchos de los conocimientos básicos que un alumno de estas titulaciones, y no digamos un profesor o futuro profesor, necesitaría conocer.

3.2. **Resultados de la evaluación**

En este apartado se muestra y se clasifica las distintas respuestas de los estudiantes ante la cuestión planteada. En la Tabla 1 se resume el número de estudiantes que responden de manera correcta, parcialmente correcta (es decir, identifican la falta de elementos para la solución correcta pero no llegan a hacer una interpretación) y de forma incorrecta de forma global o segregada por tipo de muestra. Como se observa el porcentaje de alumnos que es capaz de encontrar que el problema es irresoluble apenas llega al 11,1% (18,3% si tenemos en cuenta las respuestas parcialmente correctas). Los resultados muestran una gran dificultad para el análisis del problema, sobre todo en los alumnos de primaria, que han debido de superar, apenas unos meses antes, una prueba de acceso similar a la que se evalúa. Respecto a la muestra de futuros profesores de matemáticas encontramos que, aunque los resultados son mejores debido a sus conocimientos previos y mayor formación en el tema, muestran una dificultad preocupante de razonamiento probabilístico, ya que un 65,6% de ellos no es capaz de interpretar la irresolubilidad del enunciado.

Tabla 1. Tipos de respuestas al problema

	Matemáticas	Primaria	Totales
Correcta	19 (21,1%)	1 (1,1%)	20 (11,1%)
Incorrecta	59 (65,6%)	88 (97,8%)	147 (81,7%)
Parcialmente correcta	12 (13,3%)	1 (1,1%)	13 (7,2%)
Nº de estudiantes	90	90	180

En la Tabla 2 se observa, para la muestra general, algunas características consideradas importantes a la hora de interpretar el enunciado, tales como: si identifica probabilidades iniciales, si identifica que hay que calcular una probabilidad condicional, si identifica la falta de $P(\text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})$ o de $P(\text{"}ser\ mujer\text{"} | \text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})$, si utiliza o no el teorema de la probabilidad total o si calcula el resultado.

Los resultados muestran dificultades ya iniciales, como el alto porcentaje de alumnos que ni siquiera es capaz de identificar las probabilidades del enunciado. El problema principal, en la mayoría de los casos, radica en la interpretación a partir del enunciado de probabilidad conjunta. La interpretación del término “y”, lo que concuerda con las investigaciones de Einhorn y Hogarth (1986), Pollatsek, Well, Konold y Hardiman (1987) o Ojeda (1995), puede llevar a confusión, ya que en el lenguaje coloquial es posible interpretar la intersección como condicionamiento.

Los porcentajes muestran unas limitaciones grandes de los alumnos a la hora de interpretar el problema. Es destacable el 14,4% de alumnos de primaria que no identifica que el problema pide calcular una probabilidad condicional para resolverlo. En mucho de estos casos, como vemos en la Tabla 3, este sesgo debido a la confusión de la probabilidad de la condicional con la simple o con la conjunta. Respecto a los dos teoremas necesarios para la resolución (Teorema de la probabilidad total y de Bayes) se observa que apenas son utilizados por uno de cada tres y dos de cada tres futuros profesores de secundaria respectivamente, y apenas un 3,3% en los de primaria. Es destacable que solo dos de cada tres futuros profesores de secundaria identifica la falta de las probabilidades necesarias para la resolución del problema y el alto porcentaje de alumnos que calcula y da una solución, aunque no tenga respuesta posible.

Tabla 2. Características globales

	Matemáticas	Primaria
El alumno identifica las probabilidades iniciales	60 (66,7%)	18 (20,0%)
El alumno identifica que hay que calcular una probabilidad condicional	64 (71,1%)	13 (14,4%)
El alumno identifica la falta de la probabilidad $P(\text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})$	20 (22,2%)	2 (2,2%)
El alumno identifica la falta de la probabilidad $P(\text{"}ser\ mujer\text{"}\,|\,\text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})$,	9 (3,3%)	-
El alumno utiliza el teorema de la probabilidad total	28 (31,1%)	3 (3,3%)
El alumno utiliza el teorema de Bayes	62 (68,9%)	3 (3,3%)
El alumno calcula el resultado (aunque no de una respuesta correcta)	41 (46,1%)	78 (86,7%)

Por tanto, y dado estos resultados, se quiso comprobar cuáles eran los errores cometidos y si se identificaban con algunos de los sesgos más comunes de la literatura relacionada con el tema. Los resultados, que se muestran en la Tabla 3, hacen referencia a algunos de los sesgos previamente tratados.

Tabla 3. Sesgos probabilísticos por muestra

	Matemáticas	Primaria
El alumno identifica al empezar a resolver que hay que calcular la probabilidad condicional traspuesta	14 (15,6%)	8 (8,9%)
El alumno calcula la probabilidad condicional traspuesta	29 (32,2%)	14 (15,6%)
Confunde la probabilidad conjunta con una simple	5 (5,6%)	19 (21,1%)
Confunde la probabilidad condicional con una conjunta	21 (23,3%)	72 (80%)
Confunde la probabilidad condicional con una simple	8 (8,9%)	19 (21,1%)
Identifica los sucesos como independientes	4 (4,4%)	7 (7,8%)
Confunde la fórmula	25 (27,8%)	16 (17,8%)

Como se observa, destaca el sesgo de confundir la probabilidad conjunta con la condicional con un 51,7%, debido principalmente al altísimo porcentaje de futuros profesores de primaria, causa principal de que uno de cada dos estudiantes no identifica correctamente el enunciado, como se observó en la Tabla 2. La ocurrencia de tan alto porcentaje puede ser debida a la incorrecta interpretación de los enunciados (Pollatsek, Well, Konold y Hardiman 1987; Einhorn y Hogarth 1986), o a la ambigüedad del lenguaje coloquial que afecta a la interpretación (Falk, 1986), y no tanto a relación con la falacia de la de la conjunción, como indican las investigaciones de Tversky y Kahneman (1982) y Díaz (2007). También destacan, aunque en menor porcentaje, la confusión entre la probabilidad conjunta y la condicional con una simple, en el caso de los futuros profesores de primaria. Totohasina (1992) expone que el error radica principalmente en la estrategia generalizada de cambio de referencia: consistente en restringir el espacio muestral para tratar el problema como si se tratase de un problema de probabilidad simple. Una causa de estos sesgos (Zazkis y Leikin, 2008; Batanero, Contreras, Díaz y Cañadas, 2013) es la dificultad por parte de los estudiantes de definir, y por tanto interpretar, correctamente los distintos tipos de probabilidades. Contreras (2011) estima que esos sesgos están relacionados principalmente con errores en la interpretación de la independencia y dependencia entre sucesos, lo que también ocurre en la resolución de este problema, donde un 15,2% identifica automáticamente los sucesos como independientes que, como indica Kelly y Zwiers (1986), puede ser debido a la confusión entre independencia y exclusividad. Otro sesgo en el de confusión en las formulas, principalmente el Teorema de Bayes o el Teorema de la probabilidad total, donde un 26,3% tiene problemas. Díaz y de la Fuente (2007) hacen hincapié en este sesgo destacando que es debido a un mal razonamiento proporcional, causado por dificultades en operar con fracciones o hallar el inverso de una fracción.

En este caso, vemos que la mayor preparación formal de los futuros profesores de matemáticas no fue suficiente para no cometer razonamientos erróneos, aunque se observa un mayor desempeño en estos respecto al resto de estudiantes. Los futuros profesores de matemáticas identifican correctamente las probabilidades iniciales dos de cada tres veces, en este apartado destacan los resultados similares de los estudiantes de biología y el preocupante porcentaje, apenas un 20%, de futuros profesores de primaria que identifican correctamente las probabilidades del enunciado.

Uno de los intereses principales es conocer si los alumnos son capaces de identificar que el enunciado pide calcular una probabilidad condicional, el 71,1% de los futuros profesores de matemáticas lo hace. No ocurre lo mismo con futuros profesores de primaria donde solo lo percibe un 14,4%. En este aspecto todos los alumnos de primaria y biología que identifican que se ha de calcular una probabilidad condicional también identifican las probabilidades iniciales, no ocurriendo lo mismo con los futuros profesores de matemáticas.

En el caso de la falacia de las tasas base referente al hecho de ignorar la probabilidad a priori de un suceso en problemas que involucra la probabilidad inversa, un 85,6% de los futuros profesores de primaria intentan calcular una probabilidad simple por lo que incurren en este sesgo. Ocurre lo mismo en el 28,9% de los futuros profesores de matemáticas. Como indica Contreras (2011), por lo general, este sesgo ocurre debido a una percepción incorrecta de la dependencia entre los sucesos implicados.

Respecto a la falta de alguna de las probabilidades necesarias para resolver el problema, nos encontramos, como es normal dada la preparación de los futuros profesores de matemáticas, con un porcentaje mayor de estos alumnos que identifican una u otra probabilidad respecto a las otras dos muestras. Hay que destacar que aunque el 25,5% de estos identifica la falta de las probabilidades, solo un 21,1% es capaz de interpretar correctamente el enunciado. Es decir solo un 82,7% de los que identifican la falta de las probabilidades es capaz de concluir la irresolubilidad del problema. Ocurre lo mismo en la otra muestra en las que apenas 2,2% de los de primaria interpretan la falta de alguna de las probabilidades.

En referencia al uso de los dos teoremas necesarios, Teorema de la probabilidad total y de Bayes, observamos que el 68,9% de los futuros profesores de matemáticas utilizan el Teorema de Bayes, e implícitamente el Teorema de la probabilidad total, y que el 31,1% se decanta para resolverlo aplicando el Teorema de la probabilidad total. Como ocurre en el resto de características los alumnos de primaria apenas tienen en cuenta el uso de los dos teoremas.

Llama la atención el alto porcentaje de futuros profesores de primaria, un 41,6%, que resuelve numéricamente de forma incorrecta el problema. Esto puede ser debido a la necesidad de dar un resultado al planteamiento ya que tradicionalmente no se plantean problemas irresolubles en la enseñanza de las matemáticas y de la probabilidad en particular.

Las confusiones de probabilidades predominan en las dos muestras, destacando la confusión entre probabilidad conjunta y condicional, en el caso de los futuros profesores de primaria con un 80%, aunque uno de cada cuatro futuros profesores de matemáticas tiene este sesgo.

También destaca el caso de aquellos que confunden formulas, siendo preocupante en el caso de los futuros profesores de matemáticas con un 27,8%. En el caso de los futuros profesores de primaria el porcentaje es menor ya que en la mayoría de los casos solo aplicaban la regla de Laplace.

4. Conclusiones

Los resultados de esta pequeña evaluación indican que la existencia de estos sesgos probabilísticos está implícita en la mayoría de los estudiantes, sea cual sea su formación. En este caso, y dado las características del problema en cuestión, los sesgos se centran en la identificación de las probabilidades, la confusión entre ellas, la falacia de la condicional transpuesta y errores en las fórmulas utilizadas. Pero como indican otros estudios realizados por el grupo de investigación en educación estadística, tales como los de Díaz (2007); Contreras (2011); Batanero, Contreras, y Díaz (2011); Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012); Contreras, Batanero, Díaz y Arteaga (2012); Batanero, Contreras y Díaz (2012) o Batanero, Contreras, Díaz, C. y Cañadas (2013), más otros ya descritos anteriormente, existen numerosos sesgos que han de ser estudiados por parte de los investigadores en el área y principalmente por los profesores encargados de la enseñanza del tema. Este tema es de gran importancia, ya que como indica Stohl (2005) es posible que los propios profesores no sean conscientes de estos sesgos y por tanto de a que es debido las dificultades de los alumnos. Por tanto si profesores no son capaces de identificar estos razonamientos erróneos, puede ser debido a que ellos mismos los cometan y por tanto podrían transmitirlos a sus alumnos.

Los resultados de las diferentes muestras indican, que la formación influye, pero que en muchos casos los sesgos perviven en el razonamiento probabilístico. Ya que como hemos visto, los porcentajes de futuros profesores de matemáticas en cada uno de los sesgos es preocupante, principalmente porque en ese momento estaban a punto de finalizar su formación. Pero es importante destacar que este tipo de problema es frecuente, no su carácter irresoluble, en las pruebas de acceso a la universidad en España, y sobre todo en el distrito andaluz donde se llevó a cabo. Por tanto, todos los estudiantes de la muestra, dado el carácter de los requisitos de acceso a sus titulaciones descritos anteriormente, han debido de superar en su etapa preuniversitaria, y superar una prueba de acceso con problemas parecidos, contenidos probabilísticos similares a los aquí evaluados.

El problema en sí, dado su carácter irresoluble, puede ser debido a un deficiente razonamiento probabilístico por parte de los coordinadores encargados del diseño de la prueba de evaluación, dado que en un análisis reciente de los diferentes problemas probabilísticos en pruebas de evaluación, Carretero (2014), todos los problemas relacionados con la probabilidad condicional son resolubles y más aún en la resoluciones de la prueba que evaluación proporcionadas por la Consejería de educación, cultura y deporte de la Junta de Andalucía (2014), aparece una frase nueva que da sentido a la resolución del problema. Todo ello nos lleva a replantear la importancia de este tipo de sesgos, ya que, como es este caso, puede afectar a la nota que alcance el alumno para acceder a la universidad.

Para finalizar, sería recomendable fomentar la realización de situaciones didácticas para profesores que les permita concienciarse de sus propios sesgos y les ayuden a superarlos. Y recordar la necesidad de seguir investigando sobre los componentes esenciales en la preparación de los profesores y los métodos adecuados para enseñar en cualquier campo, pero en especial en la probabilidad, ya que aunque en la educación matemática se ha realizado un esfuerzo importante centrado en la investigación en el desarrollo profesional del docente (Ponte y Chapman, 2006; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007; Wood, 2008), este no se han reflejado en la educación probabilística. Todo ello contribuirá a mejorar la educación estadística a todos los niveles.

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P (Ministerio de Economía y Competitividad) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

ANECA (2010). *Informe Verifica para la titulación del Grado de Primaria de la Universidad de Granada*. Recuperado de http://grados.ugr.es/primaria/.

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Cádiz.

Batanero, C.; Contreras, J. M.; Díaz, C. (2011) Experiencias y sugerencias para la formación probabilística de los profesores. *Revista del Centro de Investigaciones Educacionales PARADIGMA*, *32*(2), 51-66.

Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2012). Sesgos en el Razonamiento Sobre Probabilidad Condicional e Implicaciones Para la Enseñanza. *Revista digital Matemática, Educación e Internet. 12*(2), 1-13.

Batanero, C., Contreras, J. M., Díaz, C. y Cañadas, G. (2013). Definición de la probabilidad y probabilidad condicional: Un estudio con futuros profesores. *Revemat, 8*(1), 75-91.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. y Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 151–169.

Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12*(1). On line: www.amstat.org/publications/jse/.

Carretero, M. (2014). *Análisis de problemas de probabilidad en las pruebas de acceso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de Andalucía*. Trabajo fin de máster. Universidad de Granada.

Consejería de educación, cultura y deporte de la Junta de Andalucía (2014). Recuperado de la web http://www.juntadeandalucia.es/innovacioncienciayempresa/sguitg_b_examenes_anteriores.php?tipo_asig=M25.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Contreras, J.M. (2014) ¿Existe la necesidad de evaluación de sesgos probabilísticos en futuros profesores? Andrade, L. (Ed.). (2014). Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica. Bogotá, Colombia: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.

Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C. y Arteaga, P. (2012). Evaluación de la Falacia del Eje Temporal en Futuros Profesores de Educación Secundaria. *Acta Scientiae*. *14*(3), 346-362.

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2007). Validación de un cuestionario de razonamiento probabilístico condicional. *Rema, 12*(1), 1-15.

Díaz, C., Contreras, J. M., Batanero, C. y Roa, R. (2012). Evaluación de Sesgos en el Razonamiento sobre Probabilidad Condicional en Futuros Profesores de Educación Secundaria. *Bolema*. *26*(44), 1207-1225.

Einhorn, H. J. y Hogart, R. M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin. 99*, 3–19.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.

Hill, H., Ball, D. L., y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers topic-specific knowledge of students, *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Kelly, I. W. y Zwiers, F. W. (1986). Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. *Teaching Statistics, 8,* 96-100.

Maury, S. (1986). *Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problémes*. Tesis doctoral. Universidad de Montpéllier II.

MEC (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.*

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO, 5*, 37-55.

Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education of primary teachers. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics.* Voorburg, The Netherlands.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes, 40*, 255–269.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Bahia, Brazil: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. y Cañizares, M. J. (2001). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios. *Suma*, *36*, 23-32.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366). New York: Springer.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle.* Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confi dence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*, 305-337.

Wood, T. (Ed.) (2008). *The international handbook of mathematics teacher education.* Rotterdam: Sense Publishers.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131-148.