

# Hechos didácticos significativos en el estudio de nociones probabilísticas por futuros maestros. Análisis de una experiencia formativa

*Hernán Rivas<sup>1</sup> y Juan D. Godino<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>hrivasa@uc.cl, Pontificia Universidad Católica de Chile, Campus Villarica  
<sup>2</sup>jgodino@ugr.es, Universidad de Granada

## Resumen

Se ejemplifica el uso de las nociones de configuración didáctica y hecho didáctico significativo para describir un proceso formativo sobre nociones probabilísticas elementales realizado con un grupo de 58 estudiantes de magisterio. La experiencia de enseñanza está basada en la resolución de una secuencia de cuestiones relativas al lanzamiento de dos dados y al comportamiento de la suma de puntos obtenidos en series cortas y largas de tales lanzamientos. La metodología de análisis aplicada ha permitido caracterizar el modelo didáctico implementado, identificar conflictos de significado manifestados en el proceso de estudio y el modo en que son abordados. Estos hechos didácticos pueden explicar las limitaciones de aprendizaje de las nociones y técnicas probabilísticas pretendidas.

**Palabras clave:** Formación de profesores, Probabilidad, Análisis didáctico, Enfoque Ontosemiótico.

## 1. Introducción

Una de las fases de las investigaciones orientadas al diseño didáctico es el análisis de la implementación de los procesos formativos bajo estudio. En ella se trata de realizar, en las condiciones reales del aula, las actividades docentes y discentes previamente planificadas. Este tratamiento es uno de los principales factores o variables independientes que influyen en el aprendizaje. Por tanto, la descripción y análisis de la implementación de un proceso de estudio es una fase clave de la ingeniería didáctica, junto con el análisis preliminar, el diseño y el análisis retrospectivo (Godino, Rivas, Arteaga y Wilhelmi, 2014).

En este trabajo vamos a ejemplificar el uso de algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) para analizar la fase de implementación de un proceso formativo de futuros profesores de educación primaria sobre nociones probabilísticas elementales. Las nociones específicas que vamos a aplicar son las de configuración didáctica, hecho didáctico significativo (HDS) e idoneidad didáctica.

La aplicación de las nociones de configuración y trayectoria didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006) permite realizar análisis detallados de: a) el progresivo despliegue de los significados institucionales implementados; b) de los aprendizajes y de su dependencia de los formatos de interacción que efectivamente tienen lugar; c) del uso de los recursos y del tiempo asignado. En este tipo de análisis el foco de atención es la descripción de: 1) el contenido efectivamente tratado; 2) los patrones de interacción docente – discentes; 3) el reconocimiento de los conflictos cognitivos e interaccionales que tienen lugar y la forma en que éstos son abordados por el docente y los estudiantes.

La noción de idoneidad, componentes e indicadores empíricos, resulta útil para seleccionar e interpretar unidades de análisis que representan los HDS.

## 2. Problema, marco teórico y metodología

La cuestión que nos planteamos en este trabajo es, *¿cómo identificar en la implementación de un proceso instruccional hechos y fenómenos didácticos relevantes que potencialmente pueden condicionar y explicar los aprendizajes logrados por los estudiantes?*

Esta cuestión emerge y cobra sentido dentro del marco de análisis de los procesos de instrucción matemática iniciado por Godino, Contreras y Font (2006) bajo la perspectiva del EOS y complementado con la visión ampliada de la ingeniería didáctica presentada en Godino, Rivas, Arteaga y Wilhelmi (2014). En estos trabajos se han introducido las nociones de configuración didáctica, trayectoria didáctica y hecho didáctico significativo que sintetizamos a continuación. Aludimos también a la noción de idoneidad didáctica sus componentes e indicadores, ya que se utiliza para identificar e interpretar los HDS.

Una *configuración didáctica* es un segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) que se distribuye entre los momentos de inicio y finalización de una tarea o situación – problema diseñada o implementada. Incluye, por tanto, las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar el estudio conjunto de la tarea. La situación – problema sobre la cual se delimita una configuración didáctica puede estar formada por distintas subtareas cada una de las cuales se puede considerar como una subconfiguración.

El análisis detallado de un proceso de estudio matemático requiere dividir la crónica del mismo en unidades de análisis, siendo útil para ello la noción de configuración y subconfiguración. No obstante, en el transcurso de una subconfiguración didáctica pueden ocurrir *hechos didácticos* que interesa analizar. En Wilhelmi, Font y Godino (2005) se define un *hecho didáctico* como cualquier acontecimiento que tiene un lugar y un tiempo en el devenir de los procesos de instrucción matemática y que, por alguna razón, se considera como una unidad (por ejemplo, resolver una ecuación en la pizarra). Los hechos que implican una cierta *regularidad explicable* en el marco de una teoría constituyen un *fenómeno*; pero también pueden carecer de esa regularidad en cuyo caso se tiene un fenómeno singular (dan pie a “teoremas de existencia y a contraejemplos”).

A partir de las nociones anteriores Godino et al. (2014), introducen la noción de hecho didáctico significativo (HDS). Estos autores consideran que un *hecho didáctico* es significativo (HDS) si las acciones o prácticas didácticas que lo componen desempeñan una función, o admiten una interpretación, en términos del objetivo instruccional pretendido. La significatividad se puede entender desde el punto de vista del docente, del estudiante, o bien desde un punto de vista institucional externo al sistema didáctico, es decir, del sujeto que ha realizado el estudio preliminar y el diseño instruccional. Se pueden asimilar a fenómenos singulares ya que la interpretación se hace siempre desde una cierta teoría.

Una de las teorías que permite categorizar y analizar HDS es la teoría de la idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores empíricos Godino (2011). Esta noción se define como un criterio sistémico y coherente compuesto por las dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva e instruccional (interaccional y mediacional). Para cada una de estas dimensiones se definen componentes y criterios que resultan útiles para identificar y analizar HDS que se manifiestan en el desarrollo de una trayectoria didáctica.

El uso de estas nociones lo vamos a ejemplificar mediante la descripción de la trayectoria didáctica de un proceso formativo sobre nociones probabilística con futuros maestros de educación primaria realizado con un grupo de 58 estudiantes en la Facultad de Educación de la

Universidad de Granada. Este proceso se realiza en dos sesiones de clase (una de 1 hora, y otra de 2 horas) mediante la resolución de una situación - problema que pone en juego los conceptos y procedimientos probabilísticos elementales: experimento aleatorio, espacio muestral, probabilidad, regla de Laplace, ley de los grandes números (Figura 1).

**Enunciado de la situación – problema: proyecto “lanzamiento de dos dados”**

Vamos a jugar con dos dados por parejas. Lanzamos los dados y sumamos los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, ó 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha.

- a. ¿Qué prefieres ser jugador A o B? Razona la respuesta.
- b. ¿Es equitativo este juego? ¿Tiene ventaja un jugador sobre el otro según estas reglas del juego? ¿Quién tiene más probabilidades de ganar? Razona las respuestas.
- c. Simula el lanzamiento de dos dados. Juega con un compañero 10 veces y anota los resultados de las sumas que obtienes.
- d. ¿Quién ha ganado más veces A o B? ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué? Razona las respuestas.

Una vez recogidos los datos para el conjunto de las parejas formadas en la clase se plantean las siguientes cuestiones:

- a. ¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B? ¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces A como era de esperar? ¿Qué puede hacer un profesor en esta situación para explicar el resultado a sus alumnos?
- b. Construir un diagrama de barras adosadas en el que se represente la distribución de frecuencias relativas de la tabla 4.3 y la distribución de probabilidad de la variable aleatoria “suma de puntos al lanzar dos dados”. ¿Cómo piensas que cambiará este diagrama si en lugar de representar las frecuencias relativas al lanzar 100 veces los dados se hubieran lanzado 10000 veces?

Figura 1. Enunciado de la situación problema

### 3. Trayectoria didáctica generada. Hechos didácticos significativos

Este proyecto fue implementado en dos sesiones, siendo el profesor quien presentó los temas facilitando la comprensión de los contenidos teóricos, guiando las reflexiones y moderando instancias de debates. La actividad didáctica realizada conjuntamente entre profesor y estudiantes para dar respuesta a cada una de las cuestiones y los medios utilizados constituye una configuración didáctica, y la secuencia de dichas configuraciones la trayectoria didáctica implementada.

Describimos aquí una de las clases teniendo en cuenta algunos HDS que fueron observados y posteriormente, se incluye una síntesis de los HDS que caracterizan la totalidad de la trayectoria didáctica implementada.

#### 3.1. Sesión de clase 1 (una hora)

La clase comienza con la presentación del proyecto, con el cual se pretende motivar y justificar el estudio de las nociones básicas de probabilidad orientadas a la toma de decisiones en un ambiente de incertidumbre. Seguidamente, se propone resolver la “actividad 1” y responder las cuestiones planteadas. Para resolver la actividad, la simulación del lanzamiento de

dos dados se realiza físicamente mediante el uso de trozos de papel de igual tamaño numerados de uno a seis; estos son tomados aleatoriamente por los estudiantes y luego anotan la suma de los valores obtenidos.

Durante el desarrollo de la actividad, el profesor interviene con frecuencia para evaluar y retroalimentar el trabajo de los grupos. Durante sus intervenciones, se ponen en evidencia algunas dificultades que manifiestan los estudiantes para responder y justificar la pregunta “¿Qué prefieres ser jugador A o B?”. A continuación incluimos un HDS donde se recoge la respuesta de uno de los grupos.

**P:** [...] Vamos a compartir y discutir las respuestas planteadas a la primera cuestión. Teresa, nos va explicar cómo han resuelto la tarea en su grupo (Figura. 2). Teresa, ¿qué prefieres ser jugador A o jugador B?

**Teresa:** Prefiero ser el jugador A.

**P:** ¿Están de acuerdo los demás? ¿Qué prefieren ser jugador A o B?

**E<sub>12</sub>:** No, es mejor ser B.

**E<sub>13</sub>:** Yo opino que A (hay opiniones divididas).

**P:** ¿Por qué opinas que es mejor ser B? (se dirige a E<sub>12</sub>).

**E<sub>12</sub>:** Porque de 11 resultados posibles (espacio muestral del experimento), el jugador A puede obtener 6, 7, 8 ó 9; entonces, tiene cuatro posibilidades. En cambio B tiene todas las demás posibilidades, que son siete.

**P:** ¿Y tú por qué prefieres ser A? (se dirige a Teresa)

**Teresa:** Porque el jugador A tiene 11 posibilidades, que son las que he anotado arriba. En cambio B tiene 10, que son las que aparecen abajo.



Fig.2.Solución a la cuestión a

Desde la teoría de la idoneidad didáctica este HDS puede ser interpretado bajo los criterios de idoneidad cognitiva (Godino, 2011), en tanto se observan discrepancias entre el significado personal y el significado institucional pretendido. En efecto, la justificación dada por E<sub>12</sub> se realiza a partir de los resultados en que gana cada jugador, en lugar de tener en cuenta las sumas posibles para cada resultado (sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre, 1992)); y en la respuesta de Teresa, se representan erróneamente las sumas posibles, interpretando dos sumas que aparecen en distinto orden como un único suceso.

Una vez que la mayoría de los estudiantes respondieron las cuestiones “a”, “b”, “c” y “d”, el profesor interviene para discutir algunas respuestas y sistematizar los contenidos tratados. El siguiente HDS es una de las unidades de análisis que fueron seleccionadas en esta parte de la actividad.

**P:** [...] Vamos a sistematizar este contenido. Aquí tenemos la suma de puntos (casos posibles) de lanzar los dos dados. Tenemos los dos dados, dado uno y dado dos; si se lanzan los dados y se suman los puntos salen 36 casos posibles de sumar. Las sumas son estas: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 3, 4,... El espacio muestral del experimento aleatorio de lanzar dos dados y sumarlos que es, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Son las 11 posibilidades distintas de sumas [...].

[...] En este experimento tenemos que ver de los 36 casos posibles, ¿en cuántos casos gana A y en cuántos gana B? Hay 20 casos en que gana A y 16 donde gana B. Hay más casos en los cuales gana A [...].

Este HDS se enmarca en el criterio de idoneidad interaccional. El profesor interviene para abordar la respuesta esperada y dar un status oficial al contenido tratado.

Después de esta actividad el profesor plantea algunas preguntas tendientes a evaluar la comprensión lograda respecto al cálculo de probabilidades, observándose que los estudiantes no tienen mayores dificultades para determinar dicha probabilidad. La clase continúa con la sistematización de algunos contenidos (conceptos, técnicas, representaciones,...), sobre los cuales no citamos HDS por razones de espacio.

Después de las explicaciones señaladas, el profesor propone continuar con el desarrollo de las cuestiones “e” y “f” donde, entre otros, se recoge el siguiente HDS:

**E27:** [...] En la pregunta “¿Qué ha ocurrido?”, ¿es lo mismo que antes?

**E28:** No.

**E27:** ¿Por qué no? Igual ha salido que ha ganado B. Siempre ganará B.

**E28:** Pero los experimentos son muy pocos [...].

Este HDS alude a un criterio de idoneidad interaccional por el formato dialógico de interacción (hay comunicación entre estudiantes) y también puede ser interpretado con un criterio de idoneidad cognitiva. En efecto, E27 fundamenta su explicación en los resultados obtenidos (frecuencias) al realizar el experimento 100 veces, en lugar de tener en cuenta la ley empírica de los grandes números. Según Kahneman et al. (1982), este fenómeno se conoce como el sesgo de la heurística de representatividad.

En la cuestión “f”, hay estudiantes que utilizan las frecuencias absolutas en lugar de las frecuencias relativas para comparar las dos distribuciones (distribución de probabilidad y de frecuencias) y se manifiestan también dificultades para construir el gráfico de barras adosadas. Este HDS, puede ser asociado a un criterio de idoneidad epistémica por el carácter representacional que tienen los gráficos (lenguaje) y da cuenta también de una discrepancia entre el significado personal y el significado institucional pretendido (idoneidad cognitiva).

Los conflictos anteriores fueron retomados en la fase de institucionalización realizada por el profesor, previo a finalizar la clase.

### 3.2. Síntesis de hechos didácticos significativos

En la Tabla 1 (Rivas, 2014) incluimos una síntesis de los principales HDS observados en la implementación del proyecto “Lanzamiento de dos dados”, clasificados según las facetas epistémica, cognitiva, interaccional y mediacional.

Tabla 1. Síntesis de hechos didácticos significativos en el estudio del proyecto

FACETAS	HECHOS DIDÁCTICOS SIGNIFICATIVOS
Faceta epistémica (Objetos y procesos)	<ul style="list-style-type: none"> <li>– El estudio de las nociones elementales de probabilidad se realiza a partir del <i>proyecto</i> “Lanzamiento de dos dados”; se incluyen además otras dos tareas (lanzamiento de tres monedas y probabilidad de votar) enfocadas en ejercitar los conocimientos estudiados.</li> <li>– Las <i>representaciones de uso convencional</i> en probabilidad (espacio muestral, tabla y gráfico de distribución de probabilidad, casos favorables y casos posibles) son recordadas por el profesor a partir de la presentación de la solución esperada y de la síntesis de los contenidos estudiados. Durante la sesión 2 el profesor muestra algunos programas informáticos que permiten justificar gráficamente la convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad; simulando, el experimento del lanzamiento de dos dados y el lanzamiento de una moneda.</li> <li>– Se proponen <i>procesos de traducción</i> entre distintas representaciones: representación de las sumas obtenidas de lanzar dos dados en tablas de conteo, representación de los casos posibles en tablas de distribución de probabilidad y de las sumas obtenidas en tablas de frecuencias, representación de la distribución de probabilidad y distribución de frecuencias en gráficos, y, comunicación de conjeturas y conclusiones en lenguaje natural.</li> <li>– Los <i>conceptos y definiciones básicas</i> de probabilidad (experimento aleatorio, casos posibles, espacio muestral, casos favorables, regla de Laplace, tabla de distribución de probabilidad, gráfico de distribución de probabilidad, proporción, variable estadística, porcentaje, tabla de distribución de frecuencias, gráfico de barras adosadas, diagrama de árbol) son recordados por el profesor en intervenciones puntuales y durante la presentación de la solución esperada.</li> </ul>

- 
- Los *procedimientos fundamentales* del tema de estudio son mayoritariamente aplicados por los estudiantes para dar respuesta a la cuestiones planteadas (realización del experimento, registro de los resultados, elaboración de tablas de frecuencias, construcción de gráficos de barras adosadas y cálculo de probabilidad). La tabla y el gráfico de distribución de probabilidad del experimento de lanzar dos dados es presentada por el profesor.
  - Las principales *propiedades* del tema de estudio (regla de Laplace, ley empírica de los grandes números, convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad) son dados por el profesor a través de institucionalizaciones puntuales y de la síntesis de contenidos presentada en la clase 5. El profesor ejemplifica la propiedad de la ley empírica de los grandes números con las estimaciones que hacen las compañías de seguro para establecer las primas.
  - Los estudiantes *recogen datos* a través de la simulación del *experimento aleatorio* lanzar dos dados, aunque finalmente no son utilizados en el análisis de los datos recogidos en el conjunto de la clase (actividad 2).
  - Los estudiantes tienen la oportunidad de *comparar* gráficamente la *distribución de probabilidad* del experimento “Lanzamiento de dos dados” con la *distribución de frecuencia* al haber realizado el experimento 100 veces. Para ello realizan gráficos manualmente (sesión 4) y también mediante la hoja de cálculo (sesión 5).
  - Frente a la siguiente pregunta hecha por el profesor “imaginemos ahora que se juega 100 veces, muchas veces, ¿qué pasará?”, los estudiantes se ven enfrentados a *realizar predicciones en base a la probabilidad* de que gane el jugador A o B; aunque, es el profesor quien justifica aplicando la propiedad de la “ley empírica de los grandes números”.
  - Durante el desarrollo del proyecto el profesor favorece permanentemente la capacidad de *argumentar*, pidiendo a los estudiantes que justifiquen de manera razonada sus respuestas.

---

Faceta cognitiva-afectiva (Aprendizaje, conflictos)	<p>En el desarrollo del proyecto se han manifestado como relevantes los siguientes conflictos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Frente a la cuestión “¿Qué prefieres ser jugador A o B?” Razona tu respuesta,             <ul style="list-style-type: none"> <li>• Todos los resultados del experimento son equiprobables (sesgo de la equiprobabilidad)</li> <li>• Dificultad para determinar las sumas posibles y obtener el espacio muestral del experimento. Estos contenidos son explicados por el profesor durante los procesos de institucionalización.</li> <li>• Justificación en base al número de valores de la variable aleatoria “suma de puntos al lanzar dos dados” asociados a cada jugador, en lugar de considerar las sumas posibles para cada valor. Hay cuatro valores (resultados) donde gana A (6, 7, 8 y 9) y siete donde gana B (2, 3, 4, 5, 10, 11 y 12). El profesor cuestiona esta respuesta y propone que se realice otro tipo de justificación.</li> <li>• Se concluye en base a los resultados obtenidos al simular el lanzamiento de los dados 10 veces (sesgo de la heurística de representatividad).</li> <li>• Dificultad para representar las sumas posibles al lanzar dos dados (uso de tabla de doble entrada y diagrama de árbol). El profesor explica estos modos de representación en sus intervenciones magistrales.</li> <li>• Dos sumas que aparecen en distinto orden se consideran como un único suceso; por ejemplo, 5+1 y 1+5 se contabiliza solo una vez. El profesor no aborda este conflicto durante la clase, en su lugar, alude a la solución esperada para que los estudiantes corrijan su respuesta.</li> </ul> </li> <li>– Al responder las cuestiones: “¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces A como era de esperar?”             <ul style="list-style-type: none"> <li>• Hay estudiantes que responden que siempre ganará B, justificando en base a los resultados obtenidos al realizar el experimento 100 veces (sesgo de la heurística de representatividad).</li> <li>• Un estudiante señala que “ha ganado más veces el que ha tirado más veces” justificando mediante los valores de la variable asociados a cada jugador (en cuatro casos gana al jugador A y siete a B). En esta respuesta se evidencia una dificultad de comprensión</li> </ul> </li> </ul>
---	--

---

con el concepto de distribución de frecuencias (no se reconoce el número de lanzamientos ni se distingue entre el valor de la variable y las frecuencias) y se manifiesta el sesgo de la equiprobabilidad.

- En la construcción del diagrama de barras adosadas,
  - Hay estudiantes que utilizan las frecuencias absolutas en lugar de las frecuencias relativas al comparar las dos distribuciones (distribución de probabilidad y de frecuencias).
  - Error en el uso de la escala. Se escriben las frecuencias absolutas en lugar de las frecuencias relativas en el eje de ordenada.
  - Se construyen todas las barras juntas a modo de histograma.
  - Se construyen todas las barras separadas.
  - No se incluye título ni etiquetas en el gráfico.

En el desarrollo de la tarea “Lanzamiento de tres monedas”, se han manifestado como relevantes los siguientes conflictos:

- Al determinar los casos posibles, se identifican cuatro casos en lugar de ocho. Hay estudiantes que no comprenden que el lanzamiento de cada moneda debe ser visto de manera independiente, considerado los dos resultados que aparecen en distinto orden (cara, cara, cruz con cruz, cara, cara y cruz, cruz, cara con cara, cruz, cruz) como un único suceso. El profesor propone considerar que son tres monedas que se lanzan secuencialmente (moneda 1, moneda 2 y moneda 3) y que se deben tener en cuenta todas las formas en que podrían estar dispuestas las tres monedas.
- Dificultad para determinar la equidad en el juego; hay estudiantes que no logran plantear un procedimiento para resolver la situación. Una estudiante propone utilizar la regla de tres y el profesor explica cómo resolver la situación a través del planteamiento de una ecuación con dos incógnitas.

En el desarrollo de la tarea “Probabilidad de votar” se ha manifestado como relevante el siguiente conflicto:

- Dificultad para calcular la probabilidad de este suceso compuesto. Hay estudiantes que en lugar de calcular el producto de las tres probabilidades multiplican la probabilidad de votar (0,85) por tres. El profesor explica el procedimiento correcto.
- Representación del problema mediante un diagrama de árbol. Este contenido es abordado por el profesor en la presentación de la solución esperada.

Faceta interaccional	La metodología didáctica privilegia las actividades de grupo y las intervenciones magistrales con algunas instancias de trabajo individual que se generan de manera espontánea.
(Procesos didácticos)	<ul style="list-style-type: none"> <li>– En las actividades de grupo, el profesor apoya permanentemente el trabajo de los estudiantes aclarando dudas y evaluando sus aprendizajes (evaluaciones espontáneas). Frente a algunas dificultades, hay veces en que insinúa la solución rebajando la dificultad inicial del proyecto.</li> <li>– Al finalizar la sesión 1, se recogen los informes del proyecto con los avances de los grupos como parte de un proceso de evaluación formativa. En la siguiente clase (sesión 2), el profesor realiza la retroalimentación a partir de los informes que contienen respuestas correctas sin profundizar mayormente en los errores.</li> <li>– En los procesos de institucionalización, el profesor sistematiza convenientemente los contenidos centrales del tema.</li> </ul>
Faceta mediacional	– La simulación física de los dados mediante el uso de trozos de papel ha resultado bastante eficaz, aun cuando, en el principio se presentaron algunas dificultades.
(Recursos; tiempo)	– El tiempo ha resultado insuficiente para abordar algunas actividades; específicamente, en la actividad 2 no se utilizaron los datos del experimento realizado por los grupos por falta de tiempo y en su lugar, se emplearon datos entregados por el profesor.

El análisis de los HDS identificados, relativos a la faceta epistémica, permite describir la trayectoria epistémica efectivamente implementada, esto es, los conceptos, representaciones, proposiciones, procedimientos y justificaciones probabilísticas que han sido tratados en clase para dar respuesta a las cuestiones planteadas. También se reconoce el papel del profesor y los estudiantes en la gestión de tales conocimientos cuando el foco de atención es la faceta interaccional y mediacional, revelándose un cierto predominio de la transmisión del conocimiento respecto a la indagación autónoma por parte de los estudiantes. La secuencia de HDS relativos a la faceta cognitiva muestra la trayectoria cognitiva, esto es, la progresiva construcción de los conocimientos por los estudiantes, los puntos conflictivos que se presentan y si tales conflictos son reconocidos y abordados por el profesor. En nuestro estudio destacan las dificultades para construir el espacio muestral del experimento, el sesgo de equiprobabilidad y la heurística de representatividad. La comparación mediante diagramas de barras adosadas de las distribuciones de frecuencias relativas y de probabilidad también ha requerido una atención específica.

#### 4. Reflexiones finales

La investigación de diseño o ingeniería didáctica requiere avanzar en el desarrollo de herramientas teóricas que permitan ampliar las posibilidades de análisis que brindan los actuales marcos teóricos en las diferentes fases del proceso investigativo.

A través de este trabajo, hemos mostrado que en la fase de implementación del proceso formativo las nociones de configuración, subconfiguración, hecho didáctico significativo e idoneidad didáctica permiten, por una parte, delimitar y condensar la crónica del proceso de estudio y por otra, realizar una descripción y análisis detallado de los contenidos puestos en juego, los patrones de interacción y los conflictos que han tenido lugar.

Destacamos que la enseñanza de las matemáticas, y en particular la estadística, debe partir y centrarse en el uso de situaciones - problemas (proyectos de análisis de datos), como una estrategia de dar sentido a las técnicas y teorías estudiadas, y de propiciar momentos exploratorios de la actividad matemática. Sin embargo, en la práctica matemática intervienen configuraciones de objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) (Godino et al, 2007), cuyo estudio, requiere de procesos didácticos de validación, institucionalización y ejercitación. Esto supone un importante desafío para el profesor en el logro de una enseñanza idónea de los contenidos estadísticos, más aún, cuando hay factores sobre los cuales el docente no tiene control, como es el tiempo asignado al estudio.

#### Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2012-31869 y EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

#### Referencias

- Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.



- Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34 (2/3), 167-200.
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.
- Kahneman, D., Slovic, P., y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.
- Rivas, H. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Wilhelmi, M. R., Font, V. y Godino, J. D. (2005). Bases empíricas de modelos teóricos en didáctica de las matemáticas: Reflexiones sobre la Teoría de Situaciones Didácticas y el Enfoque Ontológico y Semiótico. *Colloque International «Didactiques: quelles references épistemologiques»*. Association Francophone Internationale de Recherche Scientifique en Education. IUFM d'Aquitaine (Bordeaux, France). Versión en español disponible en : [www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/bases\\_empiricas\\_5junio06.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/bases_empiricas_5junio06.pdf).