Invariantes operatórios mobilizados por professores dos anos iniciais do ensino fundamental ao resolverem situações envolvendo combinatória

Eliana Gomes de Oliveira[1] y Cileda Queiroz e Silva Coutinho[2]

[1]elianac4@yahoo.com.br, Instituto Federal da Bahia-IFBA
[2]cileda@pucsp.br, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Resumo

Na presente comunicação, discutimos os resultados de uma pesquisa de Mestrado em Educação Matemática na qual tivemos como objetivo identificar invariantes operatórios mobilizados de forma estável por professores que lecionam nos anos inicias do ensino fundamental, durante a análise de situações-problema envolvendo combinatória. O estudo realizado é de natureza qualitativa e se caracteriza como um estudo de caso. Os sujeitos foram 14 professores dos anos iniciais da Secretaria Municipal de Guanambi-Ba, que responderam ao um questionário, sendo que cinco foram convidados a nos conceder uma entrevista. Os dados coletados foram analisados à luz da Teoria dos Campos Conceituais, buscando responder à questão norteadora desta pesquisa: Quais invariantes operatórios os professores que lecionam nos anos iniciais do Ensino Fundamental mobilizam de forma estável, durante a análise de situações envolvendo Combinatória? As análises apontaram que esses professores possuem conceitos restritos sobre combinatória, uma vez que não mobilizaram invariantes operatórios que permitem a generalização do principio multiplicativo. A investigação apontou que, em situações que envolvam mais de duas etapas, e que tenham um número maior de possibilidades, esse invariante não era mobilizado em seu domínio de validade. Dessas inferências emerge a necessidade de uma formação que contemple a discussão tanto de conhecimentos didáticos quanto específicos (Combinatória), de forma a desencadear uma reflexão criteriosa sobre prática docente relativa a este conteúdo.

Palavras-chave: Combinatória, Educação Matemática, Teoria dos Campos Conceituais, Invariantes operatórios.

1. Introdução

Este estudo está inserido em um projeto desenvolvido pelo grupo de pesquisa Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática (PEA-MAT) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), em projeto colaborativo com o grupo de pesquisa Didactica de las Matemáticas (DIMAT), da Pontifícia Universidad Católica del Peru (PUCP).

Na revisão de literatura identificamos pesquisas que investigaram saberes de professores em relação aos conhecimentos de combinatória e pudemos observar que os resultados apontam para o fato de que professores desconhecem os currículos prescritos e não tem conhecimentos específicos para ensinar esse objeto matemático-combinatória. A esse respeito podemos citar as pesquisas de Costa (2005), Sabo (2010), Santos (2011) e Rocha (2010). Estes conhecimentos, segundo Ball, Thames e Phelps (2008), são necessários para o exercício da docência.

Pesquisas realizadas por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (2006) com alunos do ensino secundário apontaram que os grupos revelaram dificuldades, mesmo nos exercícios que apresentavam agrupamentos com poucos elementos. Entre os erros, os autores elencaram:

a. Interpretação do enunciado do problema;
b. Ordem (considerar a ordem, quando esta é relevante);
c. Repetição (o aluno não considera a possibilidade de repetir os elementos quando é possível e vice-versa);
d. Confusão em relação ao tipo de objeto (confundir objetos indistinguíveis por objetos distinguíveis e vice-versa);
e. Exclusão (excluir algum elemento na forma da configuração);
f. Enumeração não sistemática (tentar resolver o problema enunciado por tentativa e erro, sem um processo recursivo que conduz à formação de todas as possibilidades);
g. Respostas intuitivas (o aluno dá uma resposta numérica, sem justificativa);
h. Interpretação errada do diagrama de árvore (pouco uso e construção inadequada.)

Esses autores afirmam que o professor deve estar atento às diferentes variáveis, como, o número de possibilidades, de etapas na elaboração de atividades, para conseguir uma evolução do raciocínio combinatório, de forma que os alunos compreendam e tenham concepções corretas para os trabalhos com análise combinatória. Ainda, recomendam que a organização do ensino apresente atividades que abranjam o pensamento recursivo e os procedimentos sistemáticos de enumeração, em vez de centrar o ensino e a aprendizagem apenas na definição e na aplicação de fórmulas.

A discussão desses autores reforça nossa opção por essa pesquisa em desenvolver um projeto e refletir a respeito dos conhecimentos dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais e justifica-se, porque esses docentes não possuem formação na área e, assim, nossa investigação pode, e deve suscitar novas discussões com o intuito de promover a melhoria do ensino de Matemática nesse nível da escolaridade.

Além de as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN (Brasil, 1997) destacar que o desenvolvimento do pensamento combinatório deve acompanhar a escolaridade matemática, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Ainda, segundo tais documentos, a abordagem da combinatória tem como objetivo fazer com que os alunos dos anos iniciais tenham contato com situações que envolvem combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem, sem necessariamente formalizá-los.

Nossa opção por desenvolver uma pesquisa centrada na identificação de invariantes operatórios mobilizados por professores dos anos iniciais do ensino fundamental se deu, basicamente, por nosso intuito de ampliar a discussão, e compará-la com pesquisas anteriores.

As pesquisas analisadas apontaram que grande parte dos professores não ministrava o conteúdo de combinatória e, quando o faziam, não desenvolviam um trabalho que mobilizasse os alunos a desenvolverem um raciocínio combinatório. Esses pesquisadores apontam que o pensamento combinatório merece ser investigado, pois representa uma ferramenta útil para diversas áreas do conhecimento científico, graças ao seu vasto campo de aplicações. Além disso, permite a elaboração de situações que podem ser discutidas por meio da construção de conjecturas e discussões de ideias, promovendo o desenvolvimento da capacidade de argumentação, nos diferentes níveis de ensino.

2. Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), proposta por Vergnaud (1996) visa ao estudo do desenvolvimento das competências para a aprendizagem, em especial, a aprendizagem matemática.

Essa teoria assume como pressuposto que o conhecimento se constrói e se desenvolve no tempo, em interação adaptativa com as situações. Segundo Vergnaud (2009a), quando o indivíduo confronta novas situações, utiliza os conhecimentos adquiridos em suas experiências passadas. Para ele, “conhecimento é adaptação, e esse se dá em diferentes situações, e é por meio de uma evolução da organização de suas atividades que o individuo se adapta” (Vergnaud, 2009a, p.13). Nessa perspectiva, um conceito não pode ser reduzido à sua definição, o mesmo não tem sentido em si mesmo, mas adquire sentido, quando se envolve numa classe de situações a serem resolvidas. Cabe pontuar, ainda, que para esse pesquisador, o domínio de um campo conceitual ocorre num longo período de tempo, por meio de experiência e maturação. Vergnaud define campo conceitual da seguinte maneira:

> Um campo conceitual é ao mesmo tempo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem com o domínio dessas situações. (Vergnaud, 2009, p. 29)

Para os processos de ensino e de aprendizagem, os campos conceituais não são independentes. Dessa forma, em seus estudos, o autor aborda distintos campos conceituais, ressaltando a organização de conceitos em campos de estruturas aditivas (compreendem para sua resolução uma adição, uma subtração ou a combinação das duas operações) e as estruturas multiplicativas (composta por multiplicação, divisão ou combinação das duas operações). Nesta pesquisa não é nosso objetivo estudar as particularidades dessas estruturas, mas sim, sua relação quanto às noções de agrupamentos e contagem.

Para Vergnaud (1996), a operacionalidade de um conceito deve ser experimentada por meio de diversas situações a ele associadas e destacar os invariantes operatórios que levam o indivíduo a reconhecer que elementos fazem parte dessa situação. O autor considera que uma construção do conceito envolve uma terna de conjunto e, simbolicamente, é representado por C = (S, I, L).

> S é um conjunto de situações, que dão sentido ao conceito; I conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados por essas situações; L conjunto das representadores linguísticas e simbólicas (algébricas, gráficas) que permitem representar os conceitos e suas relações, e consequentemente as situações e os esquemas que evocam. (Vergnaud, 2009a, p. 29)

Podemos dizer que o esquema é uma organização feita pelo próprio indivíduo, quando ele tem como objetivo conduzir o processo de resolução de uma classe de situação, porém, não consegue expressá-la por meio da linguagem natural. “O esquema não organiza somente a consulta observável, mas também o pensamento subjacente” (Vergnaud, 2009a p. 21)

Em uma dada situação, o sujeito dispõe de vários tipos de conhecimentos para identificar os objetos e suas relações, a partir dos objetivos e das regras de condutas pertinentes que são mobilizados nos esquemas. Esses conhecimentos são derivados de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, aos quais Vergnaud (1996, 2009a) designa pelo termo de “invariantes operatórios”.

Podemos dizer que conceitos-em-ação constituem um objeto, ou uma categoria de pensamento considerada relevante e permite retirar do meio as informações pertinentes e selecionar os teoremas-em-ação necessária ao cálculo e, ao mesmo tempo, dos objetivos. Para Vergnaud (2009a), os conceitos em ação permitem identificar os objetos, as propriedades e relações.

É interessante estudar os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação mobilizados pelos alunos no contexto didático. Estes conhecimentos-em-ação podem tornar-se ponto de partida para o avanço da compreensão de conceitos, embora nem sempre façam uso dos mesmos com consciência plena. É fundamental levar aos alunos às reflexões e discussões explícitas das relações e propriedades envolvidas nas situações.

Em nosso estudo, o conjunto de situações é contemplado pelas operações de combinatória (produto cartesiano, combinação, arranjo) e os invariantes operatórios referem-se aos componentes cognitivos que serão mobilizados pelos professores dos anos iniciais frente a essas situações, por meio das quais eles sejam capazes de reconhecer as propriedades do conceito como a relevância da ordem, o número de elementos por agrupamentos, as relações que podem ser reconhecidas por estes professores para analisar e entender estas situações e o conjunto de representações que serão identificados por meio de operações matemáticas, figuras, linguagem e outras representações (esquemas, enumeração).

A Teoria dos Campos Conceituais contribuiu para nossa pesquisa, no sentido de nos auxiliar nas análises dos invariantes operatórios manifestados pelos professores, ao responderem questões de combinatória.

3. Invariantes Operatórios Mobilizados pelos professores pesquisados

Considerado sob o ponto de vista da Teoria dos Campos Conceituais, as competências dos professores se desenvolvem ao longo do tempo, por meio de experiências com uma variedade de situações. Nesta perspectiva, analisamos que competências emergem por meio dos invariantes operatórios mobilizados pelos cinco professores entrevistados, tornando-as explícitas, a partir das operações, das relações, das propriedades referentes aos conceitos de combinatória. Foram propostas aos professores resolverem seis situações, nas quais envolvem diferentes contextos:

Este bloco da entrevista teve por objetivo diagnosticar invariantes operatórios mobilizados pelos professores em contexto de análise de situações envolvendo combinatória. Levantamos a hipótese de que, identificando tais invariantes, poderemos entender em que tipo de conhecimentos o professor se apoia, ao ensinar esse conteúdo e as possíveis dificuldades por eles encontradas. Foram propostas aos professores seis situações envolvendo diferentes contextos. As análises foram realizadas tendo como critério a identificação de configurações:

a. Situações que envolvem dois ou mais conjuntos de partida; e
b. Situações que envolvem um único conjunto de partida.

Discutimos cada contexto, identificando os tipos de situações propostas aos professores pesquisados:

a. As situações 1, 2 e 5 envolvem o mesmo contexto, partem de dois ou mais conjuntos para fazer as combinações. Nas situações 1 e 5, as combinações ocorrem a partir de dois conjuntos de partida e a questão 2 a partir de três conjuntos de partida;
b. As situações 3, 4 e 6 envolvem o mesmo contexto, um conjunto de partida para fazer combinações. As situações 3 e 4 envolvem duas etapas e a 6 três etapas. Em relação à ordem dos elementos nas combinações, na situação 3, a ordem dos elementos não é

relevante e nas situações 4 e 6, a ordem é relevante.

A diferenciação entre os contextos das situações foi considerada de modo a garantir sua diversidade. Entretanto, no decorrer da entrevista, não explicitamos tal diferenciação de modo a garantir que os professores identificassem o tipo de contexto de forma autônoma.

- **Situação 1**: Uma loja vende bolsas de dois tamanhos (pequeno e grande), de quatro cores diferentes (preta, marrom, azul e branca). Maria quer comprar uma bolsa nesta loja. Quantos tipos diferentes de bolsa ela pode comprar? Justifique sua resposta;
- **Situação 2**: No café da manhã, Maria tem três opções de comidas (bolo, biscoito e queijo), dois tipos de bebidas (suco e café) e duas opções de complementos (cereais e frutas). De quantas maneiras diferentes Maria poderá tomar o café da manhã, combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de complemento? Justifique sua resposta;
- **Situação 3**: Para ser representante de turma, candidataram-se 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice- representante entre os três candidatos? Justifique sua resposta;
- **Situação 4:** Em uma escola, três alunos (Lucas, Marcos e Pedro) se destacaram em uma Gincana de Matemática, e dois devem representar a escola em uma olimpíada de Matemática. Quantas duplas distintas podem ser formadas? Justifique sua resposta;
- **Situação 5**: Para a festa de São João da escola, 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançar em com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?
- **Situação 6**: Quantas senhas de três algarismos distintos podem se formar com os quatro dígitos: 2, 5, 6 e 7?

Para melhor compreensão das análises, elaboramos dois tabelas: no primeiro, especificamos os invariantes operatórios mobilizados professores entrevistados, ao analisarem e responderem essas situações de combinatória que lhes foram apresentadas. No segundo tabela, identificamos em quais situações esses professores mobilizaram esses invariantes.

Tabela 1. Invariantes Operatórios identificados nas respostas dos professores
Fonte: Oliveira, 2014. p. 198

Invariantes Operatórios	Maria	José	Josy	Sonia	Cassia
I_1- O número de possibilidade é dado pela soma das opções.	x				
I_2- Faz enumeração para saber quantas são as possibilidades.	x	x	x	x	x
I_3- Estrutura multiplicativa: representação por árvore de posibilidades			x		x
I_4- Estrutura multiplicativa: representação por enumeração.					x

O processo de análise a respeito dos invariantes operatórios identificados nas resoluções feitas pelos os professores Maria, José, Josy, Sonia e Cassia evidenciam que, em algumas situações, eles fazem escolhas corretas, embora se evidencie que o conhecimento-em-ação em jogo não foi mobilizado de forma estável pois não ocorre em todas as situações semelhantes.

O resultado das análises nos dão indícios de que esse conteúdo é pouco trabalhado e ainda não apreendido pelos professores. Na verdade, não esperávamos por esse resultado, pois as situações propostas dizem respeito à número reduzido de possibilidades e com, no máximo, três etapas, para que fosse possível representá-las por uma enumeração, tabela de dupla entrada ou diagrama de árvore. Segundo as pesquisas selecionadas para revisão de literatura, e a exemplo das pesquisas desenvolvidas por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Sabo (2010), são representações que encaminham para generalização do princípio multiplicativo e, consequentemente, para a construção do conhecimento de Combinatória.

Em relação aos invariantes operatórios mobilizados pelos professores entrevistados (Quadro 1), percebemos que, com exceção da professora Cassia, os outros quatro professores ainda não construíram os conceitos que permitem a construção de estratégias que para cada situação. No caso da professora Maria, ela mobiliza o invariante operatório I_1 nas situações 1 e 5, mas não mobiliza esse conhecimento para a situação 2, em que se envolve o mesmo contexto, porém, com três conjuntos de partida (não consegue ampliar a estratégia utilizada)

Para Vergnaud (1996), o invariante operatório desenvolvido pelo sujeito pertence a uma classe de situações nas quais nem sempre se dispõe de competências necessárias para resolvê-las, caso que se aplica a esses professores, e inferimos que podem vir a desenvolvê-las.

Também é de parecer de Vergnaud (2009a), quando o sujeito atribui significado à situação, mobiliza esquemas prévios para aplicá-los ao novo contexto que, nem sempre, é válido. Os professores desta pesquisa, de uma forma geral, mobilizam o invariante operatório I_2 na maior parte das situações, como mostra no quadro 2.

Tabela 2: Invariantes mobilizados pelos professores por situação
Fonte: Oliveira, 2014. p. 198

Professores	Situações					
	1	2	3	4	5	6
Maria	I_1	I_2	I_2	I_2	I_1	I_2
José	I_2	I_2	I_2	I_2	I_2	I_2
Josy	I_3	I_2	I_2	I_2	I_3	I_2
Sonia	I_2	I_2	I_2	I_2	I_2	I_2
Cassia	$I_{3.}$	I_3	I_2	I_2	I_3	I_4

Observamos no transcorrer das análises, o invariante I_2 é mobilizado de maneira eficaz em situações que envolvem duas etapas, mas em situações em que se envolvem três etapas, isto não ocorre da mesma forma. Nas situações 2 e 6, os professores Maria, José, Josy e Sonia não tiveram sucesso, uma vez que não conseguiram mobilizar esse invariante de forma eficaz. A esse respeito, Vergnaud (1996) afirma que, quando um esquema é ineficaz para uma determinada classe de situações, a experiência tende a querer mudar de esquema, o que não ocorreu com os professores entrevistados, exceto pela professora Cassia, que mobilizou esse invariante somente nas situações 3 e 4 e, nas demais situações, buscou elementos que permitissem aplicar a multiplicação, como mostra o **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**.

A esse respeito, Roa (2000) revela que há diversas estratégias intuitivas de enumeração, como, por exemplo, a seleção aleatória dos elementos, tentativas de enumerar todos os agrupamentos, sem utilizar elementos que não foram utilizados em outro agrupamento.

O esquema mobilizado pelas professoras Josy e Cassia, nas situações 1 e 5 pode ser classificado como um conceito-em-ação pertinente, visto que é uma proposição verdadeira para identificar a quantidade de possibilidades. No entanto, a professora Josy não conseguiu adaptar esse invariante operatório I_3 para a classe de situações envolvendo três etapas.

Nas situações 3 e 4, todos os professores mobilizaram o invariante operatório da enumeração. Os professores Josy, Sonia e Cassia tiveram dificuldades para identificar a relevância da ordem, ainda que, as duas situações envolvessem um número reduzido de possibilidades. Diante dos questionamentos do pesquisador, as mesmas conseguiram identificar todas as possibilidades.

Na situação 6, por envolver três etapas e um número maior de possibilidades, somente a professora Cassia desenvolveu uma resolução satisfatória, mobilizando o invariante operatório I_4.

Para Vergnaud (1996), os processos cognitivos e as respostas dos sujeitos são acionados conforme cada situação. Em razão disso, o trabalho com um conjunto de situações, denominado “campo conceitual da combinatória” requer o domínio de uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas.

4. Discussões e Considerações

Neste artigo apresentamos quais invariantes os professores dos anos iniciais do ensino fundamental mobilizam diante de situações envolvendo combinatória. Fundamentamos na Teoria dos Campos Conceituais. Verificamos que a entrevista semiestruturada realizada com esses cinco professores e a fundamentação teórica escolhida nos forneceram subsídios para responder à questão norteadora da pesquisa, pois, conseguimos identificar os invariantes mobilizados por esses professores, diante das diferentes situações de Combinatória. Em outras palavras, foi-nos possível identificar os invariantes que permitiram conjecturar como esses professores abordam esse conteúdo em suas aulas.

Entendemos que sem o conhecimento específico do conteúdo a ser ensinado, torna-se inviável para o professor empregar métodos diferenciados, mobilizar seus alunos a aplicarem técnicas diferenciadas na execução de tarefas.

Os resultados observados nesta investigação implicam a busca por novas pesquisas cujo foco seja a formação continuada de professores, com uma proposta voltada para que eles aprendam a refletir e a discutir sua própria prática, seus conhecimentos didático e matemático, sobre o objeto matemático a ser ensinado aos seus alunos.

Salientamos que não é necessário que os cursos de formação de professores dos anos iniciais se restrinjam apenas a aspectos metodológicos. Entendemos que sem o conhecimento específico do conteúdo a ser ensinado, torna-se inviável para o professor empregar métodos diferenciados, mobilizar seus alunos a aplicarem técnicas diferenciadas na execução de tarefas.

Referências

Ball, D. L., Hill, H. H e Bass, H. (2008). Knowing mathematics for teaching: who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29 (1), 14-46.

Batanero, C., Godino, J. D e Navarro Pelayo, V. (1996). Razonamiento combinatório en alunos nos de secundaria. *Educación Matemática*, México, v.8, p. 26-39.

Batanero, C., Godino, J. D e Navarro Pelayo, V. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school. *Educational Studies in Mathematics 32*, 181-199;

Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. (1997) *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*: 1º e 2º ciclos. 3. ed. Brasília: MEC/SEF.

Costa, C. A. (2003). *As concepções dos professores de matemática sobre o uso a modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental*. Dissertação Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Oliveira, E. G. (2014). *Raciocínio combinatório na resolução de problemas nos anos iniciais do ensino fundamental:* um estudo com professores. 230. Dissertação Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Roa, R. G. (2000) *Razonamiento combinatorio em estudiantes com preparación matemática avanzada*. Tese Doutorado.Universidade de Granada-

Rocha, C. A. (2011). *Formação docente e o ensino de problemas combinatórios*: diversos olhares, diferentes conhecimentos. Dissertação Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

Sabo, R D. (2010). *Saberes docentes*: análise combinatória no ensino médio. Dissertação Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Santos, C. R. (2005). *O tratamento da informação*: *currículos prescritos, formação de professores e implementação na sala de aula*. Dissertação Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Vergnaud, G.(1996). *A teoria dos campos conceptuais*. In J. Brun, (Org.) *Didáctica das Matemáticas.* Lisboa: Horizontes Pedagógicos.

Vergnaud, G.(2009a). O *que é aprender*? In M. Bittar e C. Muniz (Org.). *A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais.* Curitiba: Ed. CRV.

Vergnaud, G.(2009b). *A criança, a matemática e a realidade*: *problemas do ensino da matemática na escola elementar.* Critiba: UFPRE